Testing psicologico

Modelli e metodi statistici per la misurazione in psicologia

NOTAZIONE UTILE E RICHIAMI

Antonio Calcagnì

DPSS, Università di Padova

A.A. 2022/2023

Elementi di algebra lineare

Matrice: Organizzazione di numeri (es.: naturali, reali) in forma tabellare disposti in I righe e J colonne.

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1J} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{iJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{I1} & \dots & x_{Ij} & \dots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

Gli elementi di $\mathbf{X}$ possono essere individuati da una coppia di indici (i, j) che prendono valore in un sottoinsieme di $\mathbb{N}$:

$$i \in \{1, \dots, I\} \subset \mathbb{N}$$
$$j \in \{1, \dots, J\} \subset \mathbb{N}$$

Elementi di algebra lineare

Matrice: Organizzazione di numeri (es.: naturali, reali) in forma tabellare disposti in I righe e J colonne.

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1J} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \dots & \color{red}{x_{ij}} & \dots & x_{iJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{I1} & \dots & x_{Ij} & \dots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

L'elemento nella i-esima riga e j-colonna x_{ij} si dice **scalare**.

Elementi di algebra lineare

Matrice: Organizzazione di numeri (es.: naturali, reali) in forma tabellare disposti in I righe e J colonne.

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1J} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{iJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{I1} & \dots & x_{Ij} & \dots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

Il sottoinsieme di I elementi individuati fissando la j-esima colonna si chiama **vettore colonna**:

$$\mathbf{x}_{I\times 1} = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{Ij} \end{bmatrix}$$

Elementi di algebra lineare

Matrice: Organizzazione di numeri (es.: naturali, reali) in forma tabellare disposti in I righe e J colonne.

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1J} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{iJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{I1} & \dots & x_{Ij} & \dots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

Il sottoinsieme di J elementi individuati fissando la i-esima riga si chiama **vettore riga**:

$$\mathbf{x}_{1\times J} = [x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{iJ}]$$

Elementi di algebra lineare

Due matrici $\mathbf{X}_{I\times J}$ e $\mathbf{Y}_{N\times M}$ si dicono **uguali** se $I = N$, $J = M$, $x_{ij} = y_{ij}$.

Una matrice $\mathbf{X}_{I\times J}$ si dice:

- **nulla** se $x_{ij} = 0$ per ogni i, j
- **unitaria** se $x_{ij} = 1$ per ogni i, j
- **quadrata** se $I = J$
- **diagonale** se $x_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$ e $x_{ij} \neq 0$ per ogni $i = j$

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Elementi di algebra lineare

La **diagonale principale** di $\mathbf{X}_{I\times J}$ il sottoinsieme di elementi così composti:

$$\text{diag}(\mathbf{X}) = \{x_{ij} : i = j, i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J\}$$

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} \color{red}{x_{11}} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \color{red}{x_{ij}} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & \color{red}{x_{IJ}} \end{bmatrix}$$

Elementi di algebra lineare

La **traccia** di $\mathbf{X}_{I\times I}$ è definita come segue:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{I} \mathrm{diag}(\mathbf{X})_i$$

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1j} & \ldots & x_{1J} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \ldots & x_{ij} & \ldots & x_{iJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{I1} & \ldots & x_{Ij} & \ldots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Tr}(\mathbf{X}) = x_{11} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{IJ}$

Elementi di algebra lineare

Una matrice $\mathbf{X}_{I\times J}$ si dice **identità** e si indica con **I** se $x_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$ e $x_{ij} = 1$ per ogni $i = j$.

$$\mathbf{I}_{I\times J} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Elementi di algebra lineare

Una matrice $\mathbf{X}_{I\times J}$ si dice **triangolare inferiore** se $x_{ij} = 0$ per ogni $i > j$ e $x_{ij} \neq 0$ per ogni $i \leq j$:

$$\mathrm{tril}(\mathbf{X}) = \{x_{ij} : i \leq j, i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J\}$$

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \ldots & x_{ij} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{I1} & \ldots & x_{Ij} & \ldots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

Elementi di algebra lineare

Una matrice $\mathbf{X}_{I\times J}$ si dice **triangolare superiore** se $x_{ij} = 0$ per ogni $i < j$ e $x_{ij} \neq 0$ per ogni $i \geq j$:

$$\text{triu}(\mathbf{X}) = \{x_{ij} : i \geq j, i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, J\}$$

$$\mathbf{X}_{I\times J} = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1i} & \ldots & x_{1J} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & x_{ij} & \ldots & x_{iJ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & x_{IJ} \end{bmatrix}$$

Elementi di algebra lineare

Una matrice $\mathbf{X}_{I \times J}$ si dice **simmetrica** se :

$$\text{tril}(\mathbf{X}) = \text{triu}(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{X}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tril}(\mathbf{X}) = [1, 2, 3]$$
$$\text{triu}(\mathbf{X}) = [1, 2, 3]$$

Elementi di algebra lineare

Data una matrice $\mathbf{X}_{I\times J}$ si dice **trasposta** e la si indica con $\mathbf{X}^T$ la matrice $\mathbf{Y}_{J\times I}$ le cui righe sono le colonne di $\mathbf{X}$ e le colonne le righe di $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}^T_{3\times 3} = \mathbf{Y}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Elementi di algebra lineare

Una matrice $\mathbf{X}_{I\times J}$ si dice **reale** se $\mathbf{X}_{I\times J} \in \mathbb{R}^{I\times J}$, ossia se i suoi elementi sono numeri reali.

Allo stesso modo:

- un vettore colonna reale è del tipo $\mathbf{x}_{J\times 1} \in \mathbb{R}^{J}$
- un vettore riga reale è del tipo $\mathbf{x}_{1\times I} \in \mathbb{R}^{I}$

Elementi di algebra lineare

La **somma** tra due matrici reali $\mathbf{X}_{I\times J}$ e $\mathbf{Y}_{I\times J}$ è definita come segue:

$$\mathbf{Z}_{I\times J} = \mathbf{X}_{I\times J} + \mathbf{Y}_{I\times J}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 3 & 10 & 11 \\ 3 & 7 & 15 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}}$$

Allo stesso modo la differenza tra matrici reali.

Elementi di algebra lineare

Il **prodotto** tra una matrice reale $\mathbf{X}_{I\times J}$ e uno scalare $b \in \mathbb{R}$ è definito come segue:

$$\mathbf{Z}_{I\times J} = \mathbf{X}_{I\times J} \cdot b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.5 & 4.5 & 7.5 \\ 2.5 & 5.5 & 8.5 \\ 3.5 & 6.5 & 9.5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \cdot \underbrace{1.5}_{b}$$

Elementi di algebra lineare

Il **prodotto** elemento per elemento tra due matrici reali $\mathbf{X}_{I\times J}$ e $\mathbf{Y}_{I\times J}$ è definito come segue:

$$\mathbf{Z}_{I\times J} = \mathbf{X}_{I\times J} \circ \mathbf{Y}_{I\times J}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 16 & 49\\ 2 & 25 & 24\\ 0 & 6 & 54\end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \circ \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 1 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}}$$

Tale operazione si dice *prodotto di Hadamard*.

Elementi di algebra lineare

Il **prodotto** riga-colonna tra due matrici reali $\mathbf{X}_{I\times J}$ e $\mathbf{Y}_{I\times J}$ è definito come segue:

$$\mathbf{Z}_{I\times I} = \mathbf{X}_{I\times J}\ \mathbf{Y}_{I\times J}{}^{T}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3\times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{3\times 2}}$$

Nota: questa operazione esiste solo se il numero delle colonne della matrice che pre-moltiplica (**X**) è uguale al numero delle righe che post-moltiplica (**Y**).

Elementi di algebra lineare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1 \cdot 1) + (2 \cdot 0) + (1 \cdot 2) & 11 \\ 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3 \times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3 \times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{3 \times 2}}$$

Elementi di algebra lineare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ (3\cdot 1)+(0\cdot 0)+(0\cdot 2) & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3\times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{3\times 2}}$$

Elementi di algebra lineare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 0 \\ (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 2) & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3 \times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3 \times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{3 \times 2}}$$

Elementi di algebra lineare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & (1 \cdot 0) + (2 \cdot 5) + (1 \cdot 1) \\ 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3 \times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3 \times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{3 \times 2}}$$

Elementi di algebra lineare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 3 & (3 \cdot 0) + (0 \cdot 5) + (0 \cdot 1) \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3\times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{3\times 2}}$$

Elementi di algebra lineare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 0 \\ 3 & (1\cdot 0)+(1\cdot 5)+(1\cdot 1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3\times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{3\times 2}}$$

Allo stesso modo avviene il prodotto tra una matrice ed un vettore, ad esempio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3\times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{2\times 1}}$$

Elementi di algebra lineare

Allo stesso modo avviene il prodotto tra una matrice ed un vettore, ad esempio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{1\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{1\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{3\times 1}}$$

Nota: in questo caso il prodotto equivale a $z = \sum_{i=1}^{3} x_i$

Elementi di algebra lineare

Allo stesso modo avviene il prodotto tra una matrice ed un vettore, ad esempio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3\times 3}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{3\times 1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{1\times 3}}$$

Elementi di algebra lineare

Allo stesso modo avviene il prodotto tra una matrice ed un vettore, ad esempio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}14\end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{1\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{1\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{3\times 1}}$$

Nota: in questo caso il prodotto equivale a $z = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$

Elementi di algebra lineare

Due casi particolari:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3\times 3}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{3\times 3}}$$

Elementi di algebra lineare

Due casi particolari:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_{3\times 3}} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\\3 & 0 & 2\\1 & 7 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3\times 3}} \circ \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{3\times 3}}$$

Nota: in questo caso il prodotto equivale a $\mathbf{Z} = \text{diag}(\mathbf{X})$

Elementi di algebra lineare

Proprietà della somma

associatività	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
commutatività	$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{A}$
elemento neutro	$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
distributività	$\beta(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}\beta + \mathbf{B}\beta$
	$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}\beta$

Elementi di algebra lineare

Proprietà del prodotto (riga-colonna)

**le matrici siano tali che tutte le moltiplicazioni scritte siano possibili*

associatività	$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
distributività	$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
	$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\alpha)$
	$\mathbf{BI} = \mathbf{B}$
	$\mathbf{B0} = \mathbf{0}$

Elementi di algebra lineare

Proprietà delle matrici trasposte

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$
$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$$
$$(\mathbf{A}\beta)^T = \beta\mathbf{A}^T$$
$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

Elementi di algebra lineare

Proprietà della traccia

$$\text{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B})$$
$$\text{Tr}(\mathbf{A}\beta) = \text{Tr}(\mathbf{A})\beta$$
$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$$

Determinante

Il determinante $\det(\mathbf{X})$ (oppure $|\mathbf{X}|$) di una matrice quadrata $\mathbf{X}$ è uno scalare che gioca un ruolo importante in molti utilizzi dell'algebra lineare (es.: trasformazioni lineari, soluzione si sistemi di equazioni lineari, calcolo di polinomi caratteristici).

Diversi sono i metodi per il suo calcolo (es.: metodo di Laplace, algoritmo di Gauss). Nel caso di matrici quadrate di piccole dimensioni può essere utilizzata la definizione costruttiva.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{X}) = (x_{11} \cdot x_{22}) - (x_{21} \cdot x_{12})$$

Elementi di algebra lineare

Determinante

Il determinante $\det(\mathbf{X})$ (oppure $|\mathbf{X}|$) di una matrice quadrata $\mathbf{X}$ è uno scalare che gioca un ruolo importante in molti utilizzi dell'algebra lineare (es.: trasformazioni lineari, soluzione si sistemi di equazioni lineari, calcolo di polinomi caratteristici).

Diversi sono i metodi per il suo calcolo (es.: metodo di Laplace, algoritmo di Gauss). Nel caso di matrici quadrate di piccole dimensioni può essere utilizzata la definizione costruttiva.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{X}) = & (x_{11} \cdot x_{22} \cdot x_{33}) + (x_{13} \cdot x_{21} \cdot x_{32}) + \\ & + (x_{12} \cdot x_{23} \cdot x_{31}) - (x_{13} \cdot x_{22} \cdot x_{31}) - (x_{11} \cdot x_{23} \cdot x_{32}) - (x_{12} \cdot x_{21} \cdot x_{33})\end{aligned}$$

Elementi di algebra lineare

Alcune proprietà del determinante

- Se $\mathbf{X}$ ha una riga/colonna nulla o se ha due righe/colonne uguali allora $\det(\mathbf{X}) = 0$
- $\det(\mathbf{X}^T) = \det(\mathbf{X})$
- $\det(\mathbf{XY}) = \det(\mathbf{X})\det(\mathbf{Y})$ se $\mathbf{Y}$ ha la stessa dimensione di $\mathbf{X}$

Nota: una matrice quadrata $\mathbf{X}$ si dice non singolare se $\det(\mathbf{X}) \neq 0$.

Elementi di algebra lineare

Inversione di una matrice quadrata

Una matrice quadrata $\mathbf{X}$ ammette **inversa** e la si indica con $\mathbf{X}^{-1}$ se

$$\mathbf{X}\,\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I}$$

Non sempre esiste l'inversa di una matrice. In generale, se $\det(\mathbf{X}) = 0$ l'operazione di inversione non può essere fatta (una matrice singolare non può essere invertita).

Diversi sono i metodi per il calcolo della matrice inversa. Nel caso semplice di una matrice 2×2 l'inversione è fatta nel modo seguente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{X})} \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{bmatrix}$$

Elementi di algebra lineare

Proprietà della matrice inversa

$$(\mathbf{XY})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1}$$
$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^{-1} = \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{Y}^{-1}$$
$$(\mathbf{X}^{T})^{-1} = (\mathbf{X}^{-1})^{T}$$
$$\det(\mathbf{X}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{X})$$

Elementi di algebra lineare

Rango

In generale, data una matrice $\mathbf{X}$ è possibile estrarre da essa dei sottoinsiemi eliminando alcune righe o colonne. Tali sottomatrici si chiamano **minori** di $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cancel{x_{13}} \\ x_{21} & x_{22} & \cancel{x_{23}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cancel{x_{11}} & x_{12} & x_{13} \\ \cancel{x_{21}} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$$

Il **rango** di una matrice $\mathbf{X}_{I\times J}$ è uno scalare $\mathrm{r}(\mathbf{X})$ che è dato dal massimo ordine dei minori di $\mathbf{X}$ aventi determinante non nullo. In generale: $0 \leq \mathrm{r}(\mathbf{X}) \leq \min(I, J)$.

L'algoritmo di Gauss può essere utilizzato per il calcolo del rango di una matrice. Nei casi semplici di matrici quadrate di dimensioni ridotte, può essere usato il *criterio dei minori*.

Elementi di algebra lineare

Rango

Se $\det(\mathbf{X}_{I\times I}) \neq 0$ allora $r(\mathbf{X}) = I$ (matrici non singolari).

Al contrario, nel caso di matrici singolari, ossia $\det(\mathbf{X}_{I\times I}) = 0$, avremo che $r(\mathbf{X}) \leq I$. In questo caso (i) si andrà alla ricerca delle sottomatrici di ordine inferiore a I, (ii) si calcoleranno i determinanti delle sottomatrici e (iii) non appena una di queste sottomatrici avrà determinante nullo allora si arresterà la procedura di ricerca: il rango sarà pari alla dimensione di tale sottomatrice.

Nota:

Se $\det(\mathbf{X}_{n\times n}) \neq 0$ allora la matrice $\mathbf{X}$ è *non singolare*, *invertibile* e ha *rango massimo* pari a n.

Elementi di algebra lineare

operazione	comando R
$\mathbf{X}+\mathbf{Y}$	`X+Y`
$\mathbf{X}\circ\mathbf{Y}$	`X*Y`
$\mathbf{XY}$	`X%*%Y`
$\mathbf{Xy}$	`X%*%y`
$\mathbf{X}b$	`X%*%b`
$\mathrm{diag}(\mathbf{X})$	`diag(X)`
$\mathrm{tril}(\mathbf{X})$	`X[lower.tri(X)]`
$\mathrm{triu}(\mathbf{X})$	`X[upper.tri(X)]`
$\mathrm{Tr}(\mathbf{X})$	`tr(X)`
$\mathbf{X}^T$	`t(X)`
$\mathbf{X}^{-1}$	`solve(X)`
$\det(\mathbf{X})$	`det(X)`
$\mathrm{r}(\mathbf{X})$	`qr(X)$rank`

Variabili aleatorie

$$X \sim F_X(x; \boldsymbol{\theta})$$

La distribuzione F_X può essere discreta (es.: Binomiale, Poisson) o continua (es.: Gamma, Normale, Chi-quadrato) ed è un modello probabilistico il cui comportamento di posizione, scala o forma è governato dal parametro reale $\boldsymbol{\theta}$ (scalare, vettore o matrice).

I valori medi di X sintetizzano alcune caratteristiche della variabile aleatoria (es.: posizione, dispersione).

Variabili aleatorie

$$X \sim F_X(x; \boldsymbol{\theta})$$

Valore atteso. Denotato mediante $\mathbb{E}[X]$ quantifica il valore medio dell'esperimento aleatorio associato a X:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \text{sup}(X)} x \cdot f_X(x; \boldsymbol{\theta}) \qquad \text{(caso discreto)}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x; \boldsymbol{\theta}) \, dx \qquad \text{(caso continuo)}$$

Variabili aleatorie

$$X \sim F_X(x; \boldsymbol{\theta})$$

Varianza. Denotata mediante $\mathbb{V}\text{ar}[X]$ quantifica la dispersione dell'esperimento aleatorio associato a X:

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = \sum_{x \in \text{sup}(X)} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x; \boldsymbol{\theta}) \qquad \text{(caso discreto)}$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x; \boldsymbol{\theta})\, dx \qquad \text{(caso continuo)}$$

Variabili aleatorie

Principali proprietà del valore atteso

$$\mathbb{E}[\alpha] = \alpha$$

$$\mathbb{E}[X_h + X_k] = \mathbb{E}[X_h] + \mathbb{E}[X_k]$$

$$\mathbb{E}[\beta X_h] = \beta \mathbb{E}[X_h]$$

$$\mathbb{E}[\alpha + \beta X_h] = \alpha + \beta \mathbb{E}[X_h]$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[\alpha] = 0$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[X_h + X_k] = \mathbb{V}\text{ar}[X_h] + \mathbb{V}\text{ar}[X_k] + 2\mathbb{C}\text{ov}[X_h, X_k]$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[\beta X_h] = \beta^2 \mathbb{V}\text{ar}[X_h]$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[\alpha + \beta X_h] = \beta^2 \mathbb{V}\text{ar}[X_h]$$

Variabili aleatorie

Spesso gli esperimenti casuali sono descritti da più di una variabile aleatoria allo stesso tempo (**vettori casuali**):

$$X = (X_1, \ldots, X_J) \sim F_{X_1,\ldots,X_J}(x_1, \ldots, x_J; \boldsymbol{\theta})$$

In questi casi, la variabile aleatoria e la associata densità è detta multidimensionale.

La **distribuzione marginale** della *j*-esima v.a. è ottenuta per integrazione (caso continuo) o somma (caso discreto). Ad esempio, per $J = 2$:

$$f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \boldsymbol{\theta})\, dx_2$$

La **distribuzione condizionale**, invece, è ottenuta condizionando alcuni esiti ad altri:

$$f_{X_1|X_2}(x_1; \boldsymbol{\theta}) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \boldsymbol{\theta})}{f_{X_2}(x_2; \boldsymbol{\theta})}$$

Variabili aleatorie

$$X = (X_1, \ldots, X_J) \sim F_{X_1,\ldots,X_J}(x_1, \ldots, x_J; \boldsymbol{\theta})$$

Quando le due variabili aleatorie sono **indipendenti** $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ allora:

$$f_{X_1|X_2}(x_1; \boldsymbol{\theta}) = f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\theta})$$

oppure

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2; \boldsymbol{\theta}) = f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\theta}) \cdot f_{X_2}(x_2; \boldsymbol{\theta})$$

Variabili aleatorie

$$X = (X_1, \ldots, X_J) \sim F_{X_1,\ldots,X_J}(x_1, \ldots, x_J; \boldsymbol{\theta})$$

Il **valori attesi condizionati** sono ottenuti per condizionamento, ad esempio:

$$\mathbb{E}\left[X_1 | X_2 = x_2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \; f_{X_1|X_2}(x_1; \boldsymbol{\theta}) \; dx_1$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[X_1 | X_2 = x_2\right] = \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \mathbb{E}\left[X_1|X_2\right]\right)^2 \middle| X_2 = x_2\right]$$

Variabili aleatorie

$$X = (X_1, \ldots, X_J) \sim F_{X_1,\ldots,X_J}(x_1, \ldots, x_J; \boldsymbol{\theta})$$

Una caratteristica importante che quantifica il grado di co-variazione (o associazione) tra coppie di variabili aleatorie è la **covarianza**:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\text{ov}\,[X_h, X_k] &= \mathbb{E}\,[(X_h - \mu_{X_h})(X_k - \mu_{X_k})] \\ &= \mathbb{E}\,[X_h X_k] - \mu_{X_h}\mu_{X_k} \end{aligned}$$

dove in generale $\mu_X = \mathbb{E}\,[X]$. Essendo una misura di associazione lineare, abbiamo i seguenti casi:

- $\mathbb{C}\text{ov}\,[X_h, X_k] > 0$: X_h e X_k sono positivamente associati
- $\mathbb{C}\text{ov}\,[X_h, X_k] < 0$: X_h e X_k sono negativamente associati
- $\mathbb{C}\text{ov}\,[X_h, X_k] = 0$: X_h e X_k non sono *linearmente* associati

Variabili aleatorie

$$X = (X_1, \ldots, X_J) \sim F_{X_1,\ldots,X_J}(x_1, \ldots, x_J; \boldsymbol{\theta})$$

Le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_J$ sono dette **indipendenti e identicamente distribuite** (iid) se:

$$f_{X_1,\ldots,X_J}(x_1, \ldots, x_J; \boldsymbol{\theta}) = f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\theta}) \cdots f_{X_J}(x_J; \boldsymbol{\theta})$$

$$f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\theta}) = f_{X_2}(x_2; \boldsymbol{\theta}) = \ldots = f_{X_J}(x_j; \boldsymbol{\theta})$$

Variabili aleatorie iid sono alla base del **campionamento casuale semplice** e giocano un ruolo chiave nella costruzione dei teoremi limite alla base dell'inferenza statistica (es.: legge dei grandi numeri).

Modello normale multivariato

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

Consideriamo un vettore di p variabili aleatorie $X = (X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_p)$. Si dice che X segue in legge il modello normale p-variato se

$$X \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

con $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ vettore $p \times 1$ delle medie/posizioni del modello e $\boldsymbol{\Sigma}$ matrice $p \times p$ delle varianze-covarianze del modello:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_j \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \ldots & \sigma_{1j} & \ldots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{j1} & \ldots & \sigma_{jj}^2 & \ldots & \sigma_{jp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \ldots & \sigma_{pj} & \ldots & \sigma_{pp}^2 \end{bmatrix}$$

Modello normale multivariato

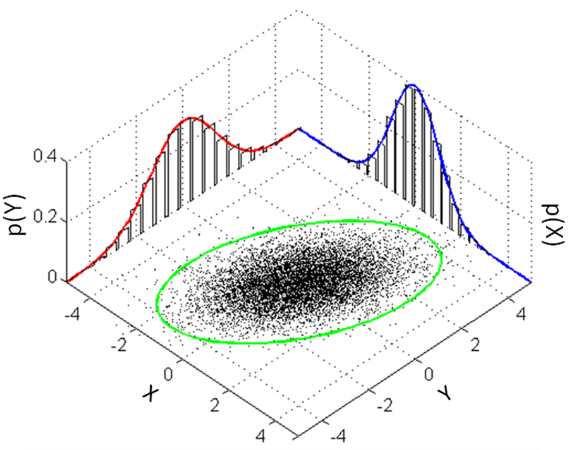
https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

La matrice di varianze-covarianze

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \dots & \sigma_{1j} & \dots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{j1} & \dots & \sigma_{jj}^2 & \dots & \sigma_{jp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \dots & \sigma_{pj} & \dots & \sigma_{pp}^2 \end{bmatrix}$$

- è simmetrica
- $\sigma_{11}^2, \dots, \sigma_{pp}^2$ sono le varianze
- se le p variabili sono tra loro indipendenti $X_h \perp\!\!\!\perp X_k$ ($h \neq k$), $\boldsymbol{\Sigma}$ diventa matrice diagonale

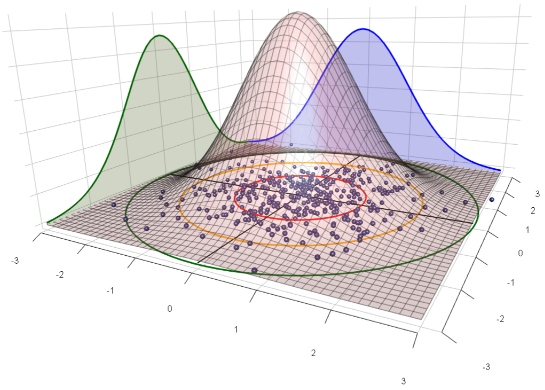
Modello normale multivariato
Caso bivariato



Note: Le densità in rosso e blu sono le densità marginali della distribuzione congiunta, quest'ultima rappresentata mediante i punti sul piano cartesiano $S_X \times X_Y$ dei supporti delle singole distribuzioni. La covarianza è rappresentata dall'ellisse di colore verde. Il valore della covarianza in questo caso è negativo.
Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution`

Modello normale multivariato

Caso bivariato



Fonte: `http://ballistipedia.com/index.php?title=Closed_Form_Precision`

Modello normale multivariato

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

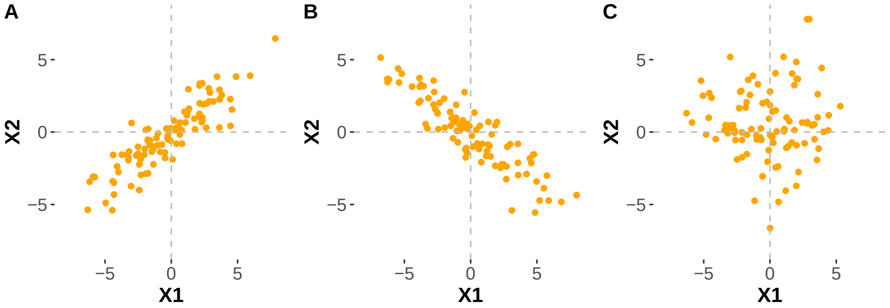
Il termine di covarianza σ_{jp} esprime l'associazione lineare tra la *j*-esima e la *p*-esima variabile:

$$\sigma_{jp} = \mathbb{C}\text{ov}\left[X_j, X_p\right] = \mathbb{E}\left[(X_j - \mu_{X_j})(X_p - \mu_{X_p})\right]$$

ed esprime l'ammontare di *variazione congiunta* di X_j e X_p. La covarianza può essere maggiore o minore di 0, ossia $\sigma_{jp} \in \mathbb{R}$.

Modello normale multivariato

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution



Caso bivariato: Rappresentazione grafica dei valori osservati congiuntamente delle variabili X_j e X_p.
A: Grafico con associazione lineare positiva $\sigma_{X_j X_p} = 6.003$.

B: Grafico con associazione lineare negativa $\sigma_{X_j X_p} = -6.003$.

C: Grafico con nessuna associazione lineare $\sigma_{X_j X_p} \approx 0$.

In tutti e tre i grafici $\mu_{X_j} = \mu_{X_p} = 0$ e varianze $\sigma^2_{X_j} = 9.140$ e $\sigma^2_{X_p} = 5.165$.

Modello normale multivariato

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

La matrice di correlazione si ottiene per trasformazione da $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \rho_{1j} & \dots & \rho_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{j1} & \dots & 1 & \dots & \rho_{jp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \dots & \rho_{pj} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- è simmetrica
- le deviazioni standard sono pari ad 1
- se le p variabili sono tra loro indipendenti $X_h \perp\!\!\!\perp X_k$ $(h \neq k)$, $\boldsymbol{P}$ diventa matrice diagonale

Modello normale multivariato

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

Il termine di correlazione ρ_{jp} esprime l'associazione lineare tra la *j*-esima e la *p*-esima variabile:

$$\rho_{jp} = \mathbb{C}\text{or}\,[X_j, X_p] = \frac{\mathbb{C}\text{ov}\,[X_j, X_p]}{\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}\,[X_j]}\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}\,[X_p]}}$$

nell'intervallo reale $[-1, 1]$, dove gli estremi indicano rispettivamente l'associazione massima negativa e positiva.

La rappresentazione grafica è analoga a quella della covarianza.

Modello normale multivariato

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

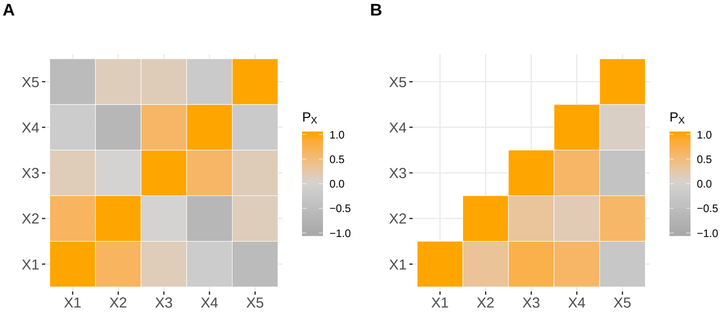


Grafico della matrice di correlazione: Rappresentazione grafica di una matrice di correlazione $\boldsymbol{P}$ mediante gradiente dei colori: $\rho_{jp} \approx -1$ (grigio scuro), $\rho_{jp} \approx 0$ (grigio chiaro), $\rho_{jp} \approx 1$ (arancione). **A**: matrice di correlazione piena (parte triangolare superiore e inferiore). **B**: matrice di correlazione senza parte triangolare superiore. Si nota che la diagonale è di colore arancione poiché diag$[\boldsymbol{P}] = \mathbf{1}$.