A Basi di matematica

> O Aulo, quelli che leggono e ascoltano i miei libretti li lodano; c'è però un certo poeta che afferma che non sono perfetti. Io non gli dò troppo peso: preferirei infatti che le portate del mio pranzo piacessero ai convitati piuttosto che ai cuochi.
>
> Marco Valerio Marziale, Liber IX, 81

A.1. Numeri e operazioni numeriche

A.1.1. I numeri e la retta

Vero o falso. La matematica di base si occupa esclusivamente di dichiarazioni per le quali si possa dire con certezza che sono vere ($3 + 2 > 4$) oppure false ($2 + 2 > 4$),[1] come lo è $2 + 2 > 4$. Si considerino come esempio le dichiarazioni seguenti:

(1) Il prodotto di due numeri dispari è dispari.
(2) Non esistono numeri interi $a > 0, b > 0$ tali che $a^2 = 2\,b^2$.
(3) Non esistono numeri interi $a > 0, b > 0, c > 0, n \geq 3$ tali che $a^n + b^n = c^n$.
(4) Ogni numero pari $a > 2$ è la somma di due numeri primi.
(5) Nello sviluppo decimale di $\pi = 3.141592653\ldots$ si trovano cento zeri consecutivi.[2]

---

[1] Si badi che esistono dichiarazioni che appaiono simultaneamente sia vere che false. Il prototipo di queste dichiarazioni è il paradosso di Epimenide: «Sto mentendo». Se tale dichiarazione è vera, Epimenide, dicendola, mente, ossia la sua dichiarazione è falsa. Ma se è falsa, ciò significa che Epimenide sta dicendo in quel momento una cosa vera, ossia che la dichiarazione è vera. In questo capitolo escludiamo dalla matematica di base tutte le dichiarazioni imparentate con il paradosso di Epimenide, e conseguentemente escludiamo tutte le questioni connesse con tali delicati aspetti della logica, di esclusiva pertinenza dei matematici professionisti.

[2] È pero vero che esistono siti come `http://www.mypiday.com/` o `http://www.angio.net/pi` in grado di localizzare la posizione di brevi sequenze di numeri nello sviluppo decimale di π. Per esempio le date di nascita degli autori (nel formato `ggmmaa`) iniziano dalle posizioni 530903, 654219 e 1783850. Lasciamo al lettore il compito di rintracciare le date.

Riflettete sul fatto che siete in grado di riconoscere queste dichiarazioni come matematica, ossia dichiarazioni che o sono vere o sono false, senza altre possibilità, indipendentemente dal fatto che sappiate concretamente dire o no se e quali sono vere o false.[3]

A.1.1.1. I numeri interi

I numeri interi [4] sono:

- $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ che sono detti interi positivi,
- 0, lo zero,
- $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ che sono gli interi negativi.

Gli interi positivi e lo zero sono detti anche numeri **naturali** (servono per contare). Quindi i numeri naturali sono gli interi $x \geq 0$. I numeri naturali si distinguono in numeri **pari**, quelli uguali al doppio di un numero naturale, e numeri **dispari**, quelli uguali al doppio di un numero naturale più uno.

La divisione con resto (o divisione intera o divisione euclidea). Siano a, b numeri interi (per semplicità con $b > 0$). Dividere (con resto) a - il **dividendo** - per b - il **divisore** - significa trovare un intero q (il **quoziente**) ed un intero r (il **resto**) tali che

$$\begin{cases} a = b\,q + r \\ q \geq 0 \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

Si noti che un numero intero positivo a è pari se diviso per 2 (nella divisione con resto) dà resto 0, ossia se $a = 2q + 0 = 2q$ (q intero). Si noti che lo zero è pari (0 è il doppio di 0).[5] Invece a è dispari se diviso per 2 (nella divisione con resto) dà resto 1, ossia se $a = 2\,q + 1$ ($q \geq 0$ intero).[6] Se nella divisione tra 2 numeri a e b il resto è 0 diciamo che b è un **divisore** di a o che b divide a; allo stesso tempo possiamo dire che a è un **multiplo** di b. Tra i numeri naturali distinguiamo i numeri **primi**, quelli che

[3] Le 1, 2 e 3 sono vere. Che la 1 sia vera verrà provato a p. 9. La verità della 2 equivale al fatto che nessuna frazione a/b al quadrato è uguale a 2, fatto noto come vero almeno dai tempi di Platone. La 3 è stata dimostrata vera nel 1995 e si tratta del cosiddetto Ultimo Teorema di Fermat, o Teorema di Fermat-Wiles. Per quanto concerne la 4, al tempo della stesura di queste note (aprile 2018) non si sa ancora se sia vera o falsa, ma certo o è vera oppure è falsa (è stato congetturato nel 1742 da Christian Goldbach che la 4 sia vera, ma nessun matematico lo ha finora dimostrato - ad eccezione forse del leggendario zio Petros: cfr. DOXIADIS, A., *Zio Petros e la Congettura di Goldbach*, Bompiani, 2001). Analogamente non sappiamo se la 5 sia vera o falsa, ma certo è una delle due: o vera o falsa.

[4] In R per specificare il numero intero 5 basta scrivere `5L`.

[5] Tranne che nella roulette dei Casinò dove lo zero non è né pari né dispari.

[6] La divisione in R si effettua con i due comandi `%/%` (che fornisce il quoziente) e `%%` (che fornisce il resto). Per esempio

```
30%/% 7 # quoziente
## [1] 4
30%% 7 # resto
## [1] 2
```

ma attenzione cambiando il segno del dividendo il risultato cambia di aspetto.

ammettono esattamente due divisori (1 ed il numero stesso, che per dare esattamente due divisori deve essere diverso da 1). Riportiamo qui i numeri primi compresi tra 1 e 100 (insieme ad un breve *script* che li genera)

```
library(numbers)
Primes(100)

##  [1]  2  3  5  7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71
## [21] 73 79 83 89 97
```

Occorre ricordare che ogni numero naturale può essere scomposto (fattorizzato) in fattori primi. Più precisamente abbiamo il seguente risultato: ogni numero naturale a maggiore di 1 o è primo o è il prodotto di numeri primi; tale prodotto è unico a meno dell'ordine dei fattori e si chiama **fattorizzazione** di a.
In altre parole ogni numero naturale $a > 1$ può essere scritto come $a = a_1 * a_2 \ldots * a_n$, dove $a_1, \ldots, a_n$ sono numeri primi. Se $n = 1$ il numero a stesso è primo. Per esempio la fattorizzazione di 1420 è $71 * 2 * 2 * 5$ o $2 * 5 * 2 * 71$. Si noti che a dispetto della semplicità della definizione la fattorizzazione è un processo complesso (quando si ha a che fare con numeri elevati) e in virtù di tale complessità è alla base della crittografia RSA. La fattorizzazione è quindi un esempio di problema matematico di straordinario impatto economico che risiede nella tempistica della risoluzione; in realtà alcuni sviluppi che riducono la complessità del problema sono possibili in linea di principio usando l'algoritmo di Shor su computer quantistici.[7]

A.1.1.2. I numeri razionali

Quando in particolare si dividono due numeri interi (con il divisore diverso da 0), il risultato è per definizione una frazione, o **numero razionale** (dal latino ratio, rapporto). Sono quindi frazioni $2/3$, $-4/5$, $23/12$ ma anche $2/1$ o $6/12$.

Operazioni con le frazioni. È fondamentale essere in grado di eseguire in modo corretto addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni con (semplici) frazioni, mantenendo il risultato in forma di frazione.[8] Riportiamo alcuni esempi

$$5/4 + 2/3 = 15/12 + 8/12 = 23/12$$
$$(5/3 - 1/2)/2 = (7/6)/2 = 7/12$$

```
-30%/%7   # quoziente
## [1] -5
-30%%7   # resto
## [1] 5
```

[7] Con il pacchetto numbers

```
library(numbers)
isPrime(2193)
## [1] FALSE
primeFactors(2193)
## [1]  3 17 43
```

[8] Con il pacchetto MASS

$$5/4 * 2/3 = \frac{5*2}{4*3} = \frac{10}{12} = 5/6$$
$$\frac{5/4}{2/3} = 5/4 * \frac{1}{2/3} = 5/4 * 3/2 = \frac{15}{8}$$
$$\frac{3/8 - 2/7}{2/7 * 3/2 - 1/5} = \frac{\frac{21-16}{56}}{3/7 - 1/5} = \frac{5/56}{8/35} = \frac{5*35}{56*8} = \frac{25}{64}$$

In caso di problemi suggeriamo di recuperare in qualunque modo le conoscenze scomparse!

Esercizi e complementi

1. Si fattorizzi il numero 1120.
2. Si decida senza svolgere i calcoli se l'equazione $12 * x = 2 * 3 * 5$ ammette una soluzione intera.
3. Si determini il numero di divisori del numero 1120 (1 e 1120 compresi).
4. Dati 2 numeri interi a e b il loro Minimo Comune Multiplo ($\mathrm{MCM}(a, b)$ o LCM) è il più piccolo numero naturale che sia multiplo sia di a che di b. In modo simile il Massimo Comune Divisore ($D = \mathrm{MCD}(a, b)$ o GCD) di due numeri interi a e b che non siano entrambi uguali a zero è il numero naturale più grande per il quale entrambi possano essere divisi. Più precisamente
   - D divide sia a che b
   - Se anche d divide sia a che b allora d divide D.

   In genere assumiamo che D sia positivo. Non è invece definito $\mathrm{MCD}(0, 0)$.[9]
5. Si mettano in ordine crescente le frazioni $1/3$, $2/5$ e $2/7$.

A.1.1.3. I numeri reali

I numeri reali sono quelli che siamo abituati ad utilizzare per misurare le grandezze fisiche, ossia i numeri del tipo $\alpha = 85.234051\ldots$ La **parte intera** di α è il numero

```
library(MASS)
fractions(2/3)
## [1] 2/3
fractions(5/4)+fractions(2/3)
## [1] 23/12
```

[9] Usando il pacchetto **numbers**

```
library(numbers)
GCD(35,2235) # Massimo Comune Divisore
## [1] 5
LCM(102,27) # Minimo Comune Multiplo
## [1] 918
```

ma

```
LCM(0,0)
## [1] 0
```

intero $n = 85$,[10] mentre $\beta = 0.234051\ldots$ è la parte decimale di α. È bene osservare che le cifre decimali di un numero reale sono infinite, anche se:

- In pratica possiamo scrivere o dire solo un numero finito di tali cifre (per esempio le prime N: si parla allora di approssimazione ad N cifre decimali).
- Se nella sequenza delle cifre decimali si trova da un certo punto in poi solo e sempre la cifra 0, tali zeri terminali non si scrivono né si leggono (ma va sempre pensato che ci siano).

La divisione fra numeri reali. Se α e β sono numeri reali «α diviso β» è quel numero reale che moltiplicato per β produce α, e si indica con uno dei simboli

$$\alpha/\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha\beta^{-1}$$

Non useremo la notazione $\alpha : \beta$[11] per evitare confusione con R dove `1:10` indica i numeri naturali da 1 a 10 e non la frazione $1/10$. Nessun numero reale può essere diviso per $\beta = 0$: infatti l'ipotetico «α diviso 0», se moltiplicato per 0, produrrebbe sempre 0, e non il risultato α voluto (tranne che nel caso $\alpha = 0$, ma nessuno ha interesse a dividere 0 per 0).[12]

I numeri che ammettono una qualunque rappresentazione decimale (finita o infinita, ossia numeri razionali e irrazionali) sono i numeri reali. L'insieme dei numeri reali viene indicato con il simbolo R. Si noti che i numeri razionali sono quelli che hanno o sviluppo decimale finito o che nel loro sviluppo presentano la ripetizione indefinita della stessa sequenza di cifre (periodo).[13] Indicheremo con $\mathrm{R}_{>0}$ (risp. $\mathrm{R}_{<0}$) l'insieme dei numeri reali strettamente positivi (risp. strettamente negativi) e con $\mathrm{R}_{\geq 0}$ (risp. $\mathrm{R}_{\leq 0}$) l'insieme dei numeri reali positivi (risp. negativi). Si osservi che la rappresentazione decimale non è unica. Per esempio

$$\begin{aligned}
x &= 0.\overline{9} \\
10x &= 9.\overline{9} \\
&\rule{2cm}{0.4pt} \\
10x - x &= 9.\overline{9} - 0.\overline{9} = 9.00000 \\
9x &= 9 \Rightarrow x = 1
\end{aligned}$$

[10] È il più grande numero intero minore o uguale al numero dato; si calcola in R con il comando `floor`. Per esempio

```
floor(-2.71)
## [1] -3
floor(2.71)
## [1] 2
```

[11] Salvo che nelle proporzioni che vedremo in seguito.

[12] In ogni caso qualsiasi espressione come 2/0, $x/0$,$0/0$, con 0 al denominatore è assolutamente priva di senso.

[13] La frazione generatrice di un numero decimale periodico è la frazione il cui sviluppo decimale corrisponde ad un assegnato numero periodico. Per esempio $9217.\overline{396} = 9208179/999$, $4.6\overline{002} = 45956/9990$.

A.1.1.4. La retta reale

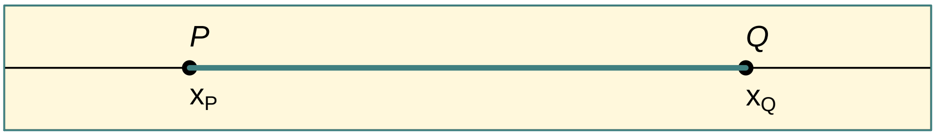
Assumiamo che sia nota la nozione (intuitiva) di retta; per Euclide la retta è un concetto primitivo e non lo contraddiremo in questo contesto.

Ci interessa ora mostrare come a ciascun punto della retta possa essere associato un numero reale (e viceversa); per realizzare questa corrispondenza scegliamo

- Un punto O sulla retta chiamato **origine**.
- Un **verso** sulla retta. Se la retta è orizzontale tipicamente si assume verso positivo a destra.[14]
- Un punto U nella direzione positiva in modo tale che la lunghezza $OU = \ell(\overline{OU})$ del segmento $\overline{OU}$ rappresenti l'**unità di misura** scelta.

A ciascun punto P sul semiasse positivo (quello che contiene U) associamo poi il numero x (**ascissa** o **coordinata** del punto) definito come OP/OU mentre se il punto è sul semiasse negativo associamo $-OP/OU$. In questo modo abbiamo instaurato una corrispondenza biunivoca tra la retta e i numeri reali.

Intervalli. Due punti P e Q sulla retta reale sono caratterizzati dalle rispettive ascisse x_P e x_Q.

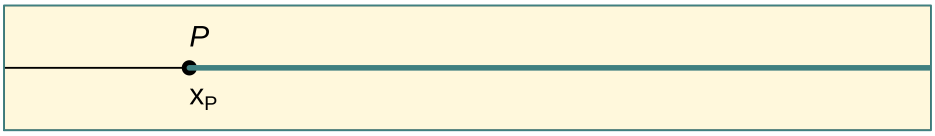


I punti sulla retta a destra di P e a sinistra di Q costituiscono il segmento $\overline{PQ}$. L'insieme dei punti del segmento $\overline{PQ}$ (se escludiamo gli estremi) ha ascisse x che verificano la condizione $x_P < x < x_Q$. Questo insieme è l'**intervallo aperto** (x_P, x_Q).[15] Un intervallo che include gli estremi si dice **chiuso** e si denota con $[x_P, x_Q]$.[16]

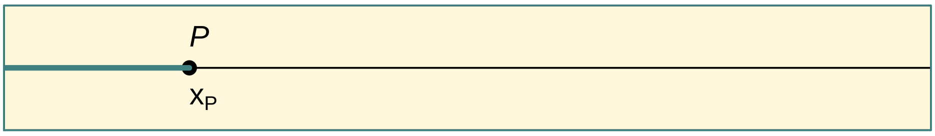
[14] Ricerche di psicologia cognitiva mostrano che la convenzione sul verso positivo della retta risiede nella scrittura. La sequenza «naturale» dei numeri naturali è ovviamente quella crescente, ossia 1, 2, 3, 4, ..., 12, 13, ..., 125, ... Pertanto, per esempio, nella scrittura delle lingue *Left–To–Right* (cfr. nota 21 a p. 14) i numeri piccoli si scrivono per primi, a sinistra, e dopo quelli grandi, più a destra (cfr. STANISLAS DEHAENE, *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1997, p. 82.)

[15] Spesso indicato con $]x_P, x_Q[$.

[16] Possiamo considerare anche intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra $(x_1, x_2]$ o chiusi a sinistra ed aperti a destra $[x_1, x_2)$.



La semiretta con origine nel punto P incluso e con direzione a destra è caratterizzata dai punti la cui ascissa x verifica la condizione $x \geq x_P$. L'insieme delle ascisse viene indicato introducendo il simbolo ∞ di infinito come $[x_P, +\infty)$.[17]



Se la semiretta è diretta a sinistra è caratterizzata dai punti la cui ascissa x verifica la condizione $x \leq x_P$ (risp. $x < x_P$), in breve $(-\infty, x_P]$ (risp. $(-\infty, x_P)$).

A.1.2. Insiemi

Un **insieme** è una collezione di oggetti distinti. Tali oggetti (gli elementi dell'insieme) possono avere natura arbitraria: numeri, lettere, parole, insiemi stessi, etc..[18] Un insieme è caratterizzato dai suoi elementi:[19] per esempio l'insieme dei numeri 1, 3 e 7 è tipicamente indicato come $\{1, 3, 7\}$ ma visto che l'ordine non conta anche $\{3, 1, 7\}$ descrive lo stesso insieme. L'insieme dei numeri dispari può essere descritto come[20]

$$\{2\,n + 1 : n \text{ è un numero intero}\}$$

Se x è un elemento di un insieme A diremo che x appartiene all'insieme A ed useremo talora il simbolo $\in$ ad indicare appartenenza: $x \in A$. L'**insieme vuoto** è l'insieme privo di elementi ed è indicato come $\emptyset = \{\ \}$. L'**universo** Ω è l'insieme che contiene tutti gli elementi in considerazione. Nel caso dell'insieme $\{1, 3, 7\}$ l'universo potrebbe consistere di tutti i numeri naturali o dei soli numeri dispari, o ancora dei soli numeri naturali minori o uguali di 10. Se consideriamo i mammiferi l'universo sarà l'insieme che contiene i nomi di tutti i mammiferi, se consideriamo i pianeti del Sistema Solare l'universo sarà l'insieme dei pianeti e così via. Un **sottoinsieme** B dell'insieme A (indicato con $B \subseteq A$) è un insieme tale che ogni elemento b di B sia anche un elemento di A. Può succedere che i due insiemi coincidano. Se A possiede almeno un elemento che non è in B allora il sottoinsieme è un sottoinsieme proprio ($B \subset A$). L'**unione** $A \cup B$ degli insiemi A e B è l'insieme costituito dagli elementi che stanno in A oppure in B. L'**intersezione** $A \cap B$ degli insiemi A e B è l'insieme costituito dagli elementi che stanno in A e in B.

Il **complemento** di un insieme A è costituito dagli elementi dell'universo Ω che non sono in A e viene indicato con $\neg A$ o anche A^C. Il **complemento** di un insieme A

[17] Se P è escluso la semiretta è $(x_P, +\infty)$.

[18] Gli elementi non possono essere ripetuti. Se scriviamo un insieme come $\{a, b, c\}$ potrebbe succedere che $a = c$ e in tal caso l'insieme sarebbe $\{a, b\}$ (c sarebbe superfluo). In R se scriviamo un insieme `x=c("a","b","e","d","b")` per eliminare i duplicati possiamo usare `unique(x)`.

[19] Almeno quelli di cui ci occuperemo.

[20] Il simbolo : (o la barra verticale |) si potrebbe sostituire con l'espressione «tale che » e precede le proprietà caratterizzanti l'insieme.

nell'insieme B (o differenza di B e A) costituito dagli elementi di B che non sono in A e viene indicato con $B \setminus A$.

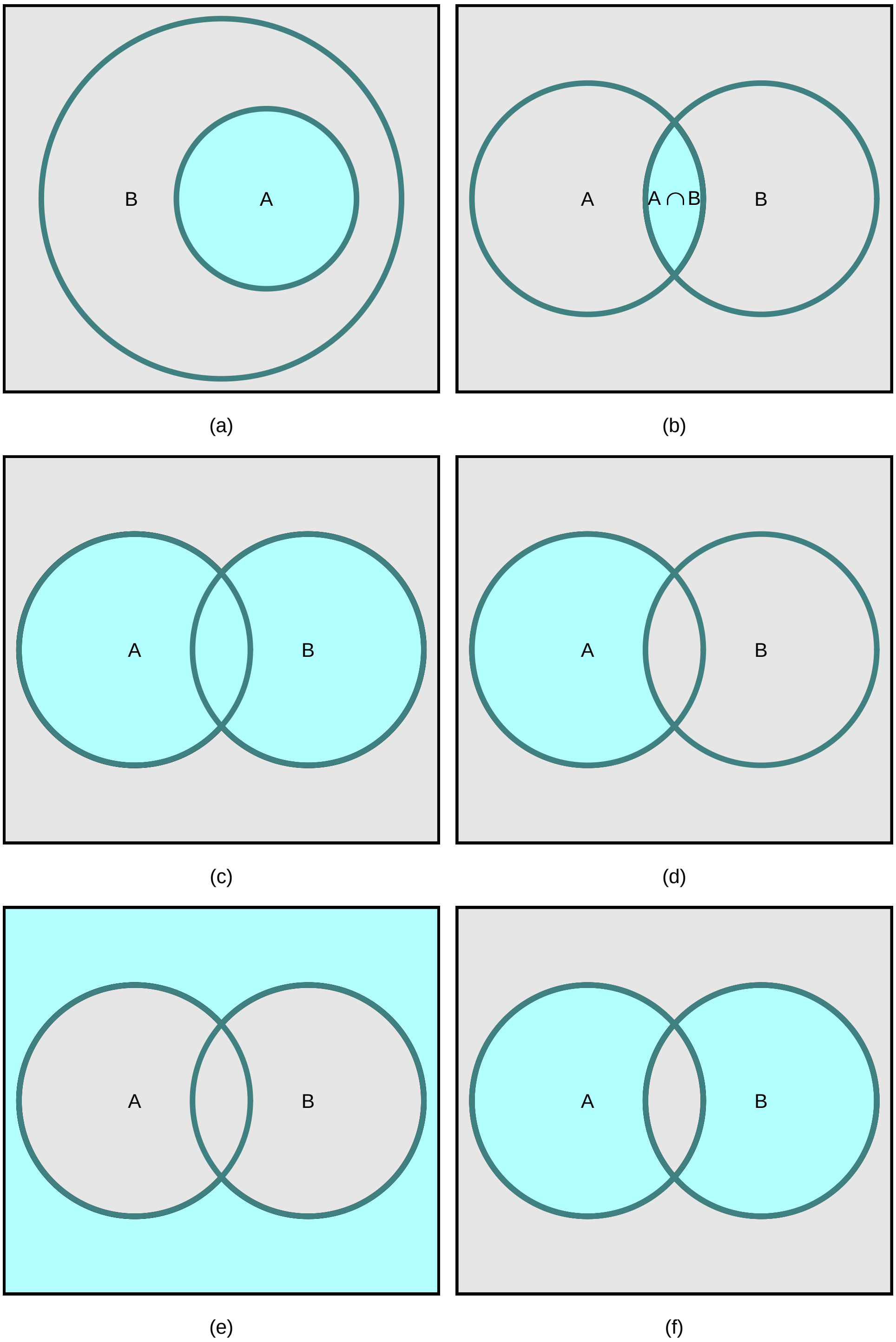


Figura A.1.1. In figura gli insiemi indicati sono colorati in blu. (a) Sottoinsieme proprio A di un insieme B, $A \subset B$. (b) Intersezione $A \cap B$. (c) Unione $A \cup B$ di insiemi. (d) Insieme $A \setminus B = A \cap \neg B$. (e) Insieme $\neg(A \cup B)$. (f) Differenza simmetrica $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$.

Prodotto cartesiano, corrispondenze di insiemi e cardinalità. Il **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B indicato con $A \times B$ è l'insieme i cui elementi sono le possibili coppie (a, b) al variare di a in A e di b in B

$$A \times B = \{(a, b), a \text{ in } A \text{ e } b \text{ in } B\}$$

Una **relazione binaria** R tra due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Si dice che la relazione è **biunivoca** se ad ogni elemento a di A corrisponde un unico elemento b di B e viceversa. La **cardinalità** $|A|$ di un insieme A (quando l'insieme ha un numero finito di elementi) è il numero degli elementi dell'insieme. Ogni insieme che può essere posto in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali ha cardinalità $\aleph_0$ (si legge alef–zero). Quindi i numeri naturali stessi, gli interi, i numeri pari o dispari ma anche i numeri razionali hanno cardinalità $\aleph_0$. Si dice che tali insiemi hanno la potenza del numerabile. Tale corrispondenza non è invece possibile per l'insieme dei numeri reali che ha quella che si chiama la potenza del continuo c (ma qui le cose diventano complicate e lasciamo al lettore la facoltà di approfondire l'argomento).

Operare con gli insiemi in R. Le operazioni insiemistiche descritte sono agevolmente eseguibili in R. Ricordando che `letters` sono le 26 lettere dell'alfabeto possiamo determinare differenza, intersezione, unione, verificare la coincidenza di 2 insiemi e verificare l'appartenenza di un elemento ad un insieme

```
Omega = letters   # l'universo delle lettere minuscole
A = c("a", "e", "i", "o", "u")
B = c("a", "b", "c", "d", "e")
setdiff(Omega, A)   # complemento di  A in Omega

##  [1] "b" "c" "d" "f" "g" "h" "j" "k" "l" "m" "n" "p"
## [13] "q" "r" "s" "t" "v" "w" "x" "y" "z"

intersect(A, B)   # intersezione

## [1] "a" "e"

union(A, B)   # unione

## [1] "a" "e" "i" "o" "u" "b" "c" "d"

setequal(A, B)   # uguaglianza di insiemi

## [1] FALSE

is.element("a", letters)   #appartenenza

## [1] TRUE

A %in% B   # appartenenza per ciascun elemento di A

## [1]  TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE

C = c("a", "e", "i", "o", "u", "a")
setequal(A, C)   #le operazioni insiemistiche eliminano i duplicati

## [1] TRUE
```

A.1.3. Teoremi e dimostrazioni

Una volta che si accerti che una dichiarazione matematica è vera, si dice che è un teorema; l'accertamento della sua verità è la dimostrazione del teorema. Per esempio:

A.1.1. Teorema. Il prodotto di due numeri dispari è dispari.

DIMOSTRAZIONE. Dati due numeri dispari qualsiasi, essi sono del tipo $u = 2m + 1$, $v = 2n + 1$. Quindi il loro prodotto

$$uv = (2\,m + 1)(2\,n + 1) = 4m\,n + 2\,m + 2\,n + 1 = 2(2\,m\,n + m + n) + 1$$

è il doppio di $2\,m\,n + m + n$, più uno, quindi è dispari. ■

Dimostrazioni per assurdo. Per dimostrare la verità di una dichiarazione matematica `DM`, ossia per dimostrare il teorema `DM`, si procede talvolta per assurdo, in latino per reductio ad absurdum. Vi sono solo due possibilità: `DM` vera, oppure `DM` falsa.[21] Immaginiamo allora che `DM` sia falsa: se riusciamo a mostrare che da questa assunzione consegue un fatto impossibile (ossia assurdo, e quindi falso per definizione), non resta che la prima possibilità, ossia non resta che accettare che `DM` sia vera. Per esempio:

A.1.2. Teorema. Non esistono numeri interi $a > 0$, $b > 0$ tali che $a^2 = 2b^2$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

`DM` = «*Non esistono numeri interi $a > 0$, $b > 0$ tali che $a^2 = 2b^2$*»

Il contrario di DM è che ci sono dei numeri interi $a > 0$, $b > 0$ tali che $a^2 = 2b^2$, quindi immaginiamo che ci siano questi numeri a e b. Quindi $a^2/b^2 = (a/b)^2 = 2$. Se nella frazione a/b, a e b sono entrambi pari, la frazione può essere semplificata dividendo numeratore e denominatore per 2 fino a che almeno una tra numeratore e denominatore diventi dispari. In questo modo otteniamo una frazione $A/B = a/b$ tale che $A^2 = 2B^2$, dove A, B non sono pari entrambi. Poiché A^2 è pari anche A è pari; pertanto B è dispari e lo scriviamo come $B = 2n + 1$. Adesso basta fare i conti $A^2 = 2B^2$: diventa

$$\begin{aligned}(2\,m)^2 &= (2\,n + 1)^2\\ 4\,m^2 &= 2(4\,n^2 + 4\,n + 1)\\ 2\,m^2 &= 2(2\,n^2 + 2\,n) + 1\end{aligned}$$

il che è assurdo (ossia impossibile) visto che l'ultima riga afferma l'uguaglianza fra un numero pari (a sinistra) ed uno dispari (a destra dell'uguale). ■

Si noti che il teorema garantisce che non esiste una frazione il cui quadrato sia uguale a 2.

Dire il contrario. È importante saper dire il contrario di una dichiarazione matematica `DM`. Il contrario di `DM` si chiama la negazione di `DM` e si indica con `non DM`. Esempi importanti:

Esempio A.1.3. [Negazione] Negare le seguenti dichiarazioni, sia nel contesto matematico che in quello metaforico in parentesi:

(1) Tutti gli elementi x dell'insieme A appartengono all'insieme B (ogni autista è bigliettaio).

[21] Si ricordi quanto detto a pagina 2 a proposito di Dichiarazioni matematiche.

	DM	non DM
1.	$x > a$	$x \leq a$
2.	$x = b$	$x \neq b$
3.	$x < c$	$x \geq c$
4.	Tutti gli elementi x dell'insieme A hanno la proprietà che … (cioè: ogni elemento x dell'insieme A ha la proprietà che …)	Esiste almeno un elemento x nell'insieme A che non ha la proprietà che … (cioè: qualche elemento di A non ha la proprietà che …)
5.	Nessun elemento x dell'insieme A ha la proprietà che …	Esiste almeno un elemento x nell'insieme A che ha la proprietà che … (cioè: qualche elemento di A ha la proprietà che …)

(2) Nessun elemento x dell'insieme A appartiene all'insieme B (nessun autista è bigliettaio).

(3) Esiste almeno un elemento di A che appartiene all'insieme B (qualche autista è bigliettaio).

(4) Esiste almeno un elemento di A che non appartiene all'insieme B (qualche autista non è bigliettaio).

Almeno, al più. È bene ricordare l'uso di questi termini. Dire «almeno 6 elementi di A hanno la proprietà che» significa che gli elementi di A con la detta proprietà sono in quantità maggiore o uguale a 6 (possono essere 6 oppure 7, o di più, anche tutti). Dire «al più 6 elementi di A hanno la proprietà che» significa che gli elementi di A con la detta proprietà sono in quantità minore o uguale a 6 (possono essere 6 oppure 5, o di meno, o addirittura nessuno).

Distinti, coincidenti. Talora i matematici fanno ricorso ad espressioni del tipo «consideriamo due elementi distinti»[22] di un certo insieme per enfatizzare che si tratta veramente di due e non di uno. Oppure dicono « due soluzioni coincidenti» di un dato problema per intendere che di soluzioni ve ne è di fatto una sola. Sconsigliamo l'uso di questi termini in quanto assolutamente inutili e comunque lontani dal linguaggio comune: nessuno di norma ordina al bar due caffè distinti se ne vuole due, né due caffè coincidenti se ne vuole uno solo.[23]

A.1.4. Variabili, costanti, valori

Per capire questi termini conviene pensare in modo informatico. Immaginiamo un computer dotato di un certo numero di celle di memoria fisica

[22] Parlando (in matematica) di punti distinti, l'inglese usa il termine *distinct*, ovviamente non *gentleman*; anche in italiano, parlando di punti distinti, si intendono due punti diversi, e non due punti particolarmente eleganti.

[23] Cfr. anche VILLANI V., *Cominciamo da Zero*, Pitagora Editrice, Bologna, 2003, pp. 204-205.

Esse sono identificate da indirizzi fisici:

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

Ma ciascuna di esse può essere identificata anche da un nome simbolico:

x	y	z	u	v	t	α	β	ρ	τ

Questi x, y, z, ecc. sono variabili. Una espressione come $x^2-3*x+2<0$ non è vera né falsa fino a che la casella della x resta vuota: infatti nessuna verifica è possibile. Se nella cella di memoria 0000 (cioè la x) viene messa una costante come il numero 1.4

1.4									
x	y	z	u	v	t	α	β	ρ	τ

ossia se si pone $x = 1.4$, o con altra scrittura $1.4 \to x$ (o $x \leftarrow 1.4$), l'espressione $x^2 - 3*x + 2 < 0$ può essere valutata sostituendo la costante 1.4 al posto della variabile x. Si ottiene allora $(1.4)^2 - 3*(1.4) + 2 = -0.24$.[24] e quindi l'espressione viene valutata come vera (`TRUE`). Si dice che l'espressione è stata valutata assegnando alla variabile x il valore 1.4. Un altro esempio: l'espressione $y = x^2 - 3*x + 2$ non è vera né falsa fino a che è vuota la casella della x o è vuota quella della y: infatti in tal caso nessuna verifica è possibile. Ma se si assegnano i valori $x = 7, y = 30$,

7	30								
x	y	z	u	v	t	α	β	ρ	τ

allora l'espressione può essere valutata sostituendo la costante 7 al posto della variabile x e la costante 30 al posto della variabile y. Si ottiene allora $30 = 7^2 - 3*7 + 2$, e quindi l'espressione viene valutata come vera. Se invece usiamo i valori

7	31								
x	y	z	u	v	t	α	β	ρ	τ

si ottiene $31 = 7^2 - 3*7 + 2$, e quindi l'espressione viene valutata come falsa (`FALSE`, in quanto è falso che 31 = 30).

[24] In R occorre assegnare il valore 1.4 ad x precisamente con una delle due istruzioni precedenti e poi valutare l'espressione

```
x = 1.4
x^2-3*x+2
## [1] -0.24
x^2-3*x+2 < 0
## [1] TRUE
```

È importante notare che i valori che possono essere inseriti nelle celle non possono essere cose qualunque prelevate da un universo sconfinato: di norma per ogni variabile è (più o meno esplicitamente) fissato un insieme da cui possono essere prelevati i corrispondenti valori: l'insieme di variabilità, o dominio, della variabile.

A.1.5. Equazioni in una variabile

Consideriamo un problema come $2\,x - 3 = 4$. Si tratta di un'equazione in una variabile, la variabile x, della quale si assume implicitamente che il dominio sia tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Per certi valori della x l'espressione può essere vera e per altri può essere falsa (nessun altro caso è ammesso). Indichiamo con A l'insieme dei valori della variabile x che, sostituiti nell'espressione $2\,x - 3 = 4$, la rendono vera: si tratta dell'insieme delle soluzioni dell'equazione $2\,x - 3 = 4$. Nel caso speciale A è formato da un solo punto, $A = \{7/2\}$.

Consideriamo ora l'equazione $x * \sqrt{x-1} = 0$. Abbiamo 2 soluzioni candidate (tra i numeri reali) $x = 0$ e $x = 1$, che sono i valori della x che rendono nullo uno dei 2 fattori. Ma sono realmente soluzioni? Sicuramente l'espressione vale 0 quando sostituiamo $x = 1$ ma il secondo termine del prodotto appare privo di significato (tra i numeri reali) se poniamo $x = 0$.

Equazioni di primo grado. Si incontrano spesso equazioni come $a\,x + b = c\,x + d$, che è una forma tipica dell'**equazione di primo grado**, o equazione lineare, (nell'incognita x). I simboli a, b, c, d indicano costanti reali, ossia numeri reali. È evidente che

- possiamo trasferire tutti i termini contenenti x a sinistra e i termini costanti a destra ottenendo $ax - cx = d - b$ o anche

$$(a-c)\,x = d - b$$

  - Se $(a - c) \neq 0$ possiamo dividere per $a - c$ ottenendo la soluzione unica

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

  - Se $(a - c) = 0$
    - Se $d = b$ l'equazione diviene $0 = 0$ che è sempre verificata.
    - Se $d - b \neq 0$ troviamo $0 =$ numero diverso da 0 quindi non abbiamo soluzioni.

A.1.6. Disequazioni

Consideriamo ora un problema come $2\,x - 3 < 4$. Si tratta di una (dis)equazione in una variabile, la variabile x, della quale si assume implicitamente che l'insieme di variabilità sia tutto l'insieme dei numeri reali. Per certi valori della x l'espressione può essere vera e per altri può essere falsa (nessun altro caso è ammesso). Indichiamo con A l'insieme dei valori della variabile x che, sostituiti nell'espressione, la rendono vera: si tratta dell'insieme delle soluzioni della disequazione. Nel caso speciale della disequazione $2\,x - 3 < 4$ l'insieme A è una semiretta, formata da tutti i numeri reali $< 7/2$, in simboli $A = (-\infty, 7/2)$.

In generale si possono incontrare incontrano disequazioni del tipo minore o uguale

$$a\,x + b \leq c\,x + d$$

che si chiamano **disequazioni di primo grado** (nell'incognita x). Per trovarne le soluzioni conviene seguire un metodo fisso: portare cx a sinistra e b a destra, ottenendo $a\,x - c\,x \leq d - b$, da cui, raccogliendo la x e portando $d - b$ a sinistra, otteniamo la semplificazione $(a - c)\,x - (d - b) \leq 0$. Si segue lo stesso metodo anche per gli altri tre casi di disuguaglianze, quelli dei segni minore $<$, maggiore o uguale $\geq$, e maggiore $>$. Per il tipo che stiamo studiando, ossia

$$(a - c)\,x - (d - b) \leq 0 \tag{A.1.1}$$

occorre distinguere i tre casi seguenti.

- Se $a = c$ la disuguaglianza A.1.1 afferma che «un certo numero, precisamente $b - d$, è minore o uguale (oppure minore, oppure maggiore e uguale, oppure maggiore) di zero», e quindi sempre vera o sempre falsa (dipende dal numero); quando è sempre vera, ogni x è soluzione (quale che sia il valore assegnato ad x la disuguaglianza è vera); quando è sempre falsa, nessun x è soluzione (quale che sia il valore assegnato ad x la disuguaglianza è e resta falsa).
- Se $a > c$ possiamo dividere (nella disuguaglianza A.1.1) la quantità $(a - c)x - (d - b)$ negativa o zero per la quantità $a - c$ positiva, ottenendo una quantità negativa o zero[25]
$$x - \frac{d - b}{a - c} \leq 0$$
per cui solo soluzioni tutti gli x della semiretta $x \leq (d - b)/(a - c)$. Analogamente si procede negli altri tre casi.
- Se $a < c$ possiamo dividere (nella disuguaglianza semplificata A.1.1) la quantità negativa o zero per la quantità negativa $(a - c)$, ottenendo una quantità positiva o zero
$$x - \frac{d - b}{a - c} \geq 0$$
per cui solo soluzioni tutti gli x della semiretta $x \geq (d - b)/(a - c)$. Analogamente si procede negli altri tre casi.

Maggiorare, minorare. In matematica, maggiorare una funzione reale f di variabile reale x su un insieme D significa trovare una funzione g tale che, per ogni x in D, risulti

$$f(x) \leq g(x)$$

Ovviamente, affinché la disuguaglianza abbia interesse e dia ulteriori informazioni sulla f, è bene che la g abbia un'espressione «più semplice » della f. Per esempio:

$$\sin(x) \leq x \quad (x \geq 0)$$

Ricordiamo che talvolta invece, nel linguaggio comune, maggiorare una quantità, come per esempio un prezzo, vuol dire aggiungerci qualcosa, come in *prezzo maggiorato dell'IVA al 22%.* o *prezzo maggiorato di 10 euro per consegna a domicilio.*

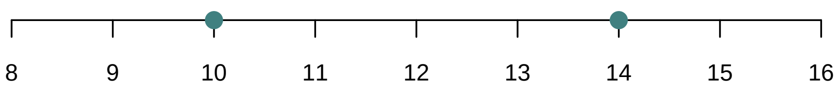
[25] Si ricordi che «meno diviso più uguale meno», come «meno per più uguale meno».

A.1.6.1. Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

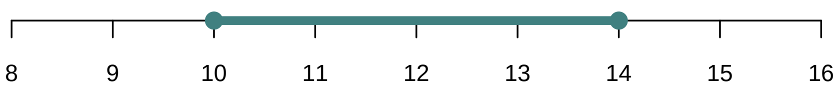
Valore assoluto. Il **valore assoluto** di un numero reale x è la distanza di x dallo 0, misurata sulla retta reale. Ovviamente la distanza di $x = 3$ dallo 0 è uguale a 3, esattamente come è uguale a 3 la distanza di $x = -3$ dallo 0. Il valore assoluto di x è indicato con $\mid x \mid$. Per cui

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

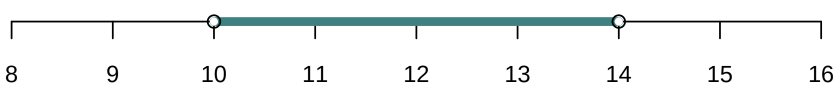
- Quali sono i numeri reali x che distano da 12 esattamente 2? Sono quelli per cui $\mid x - 12 \mid = 2$. Si tratta evidentemente dei due numeri $12 - 2 = 10$ e $12 + 2 = 14$. Le soluzioni sono quindi i due numeri reali $x = 10$ e $x = 14$, ossia quelli dell'insieme di due elementi $\{10, 14\}$.



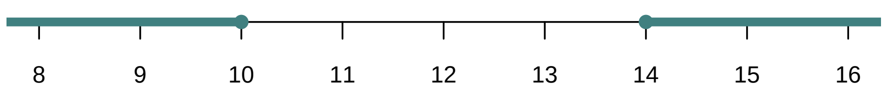
- Quali sono i numeri reali x che distano da 12 non più di 2? Sono quelli per cui $\mid x - 12 \mid \leq 2$. Fra questi, quelli a distanza massima ammessa, esattamente uguale a 2, sono evidentemente $12 - 2 = 10$ e $12 + 2 = 14$. Le soluzioni sono i numeri reali x tali che $10 \leq x \leq 14$, ossia quelli dell'intervallo chiuso $[10, 14]$.



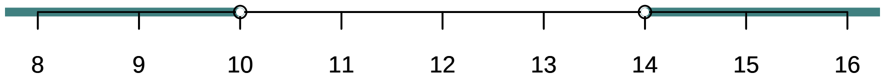
- Quali sono i numeri reali x che distano da 12 meno 2? Sono quelli per cui $\mid x - 12 \mid < 2$. Sono evidentemente tutti quelli per cui $\mid x - 12 \mid \leq 2$ tranne quelli con distanza da 12 esattamente uguale a 2 (che sono $12 - 2 = 10$ e $12 + 2 = 14$). Le soluzioni sono i numeri reali x tali che $10 < x < 14$, ossia quelli dell'intervallo aperto $(10, 14)$



- Quali sono i numeri reali x che distano da 12 almeno 2? Sono quelli per cui $\mid x - 12 \mid \geq 2$. Fra questi, quelli a distanza minima ammessa, esattamente uguale a 2, sono evidentemente $12 - 2 = 10$ e $12 + 2 = 14$. Le soluzioni sono i numeri reali x tali che $x \leq 10$, oppure tali che $x \geq 14$ ossia quelli della semiretta chiusa $(-\infty, 10]$ e quelli della semiretta chiusa $[14, \infty]$.



- Quali sono i numeri reali x che distano da 12 più di 2? Sono evidentemente tutti quelli per cui $|x - 12| \geq 2$ tranne quelli con distanza da 12 esattamente uguale a 2 (che sono 12 2 = 10 e 12 + 2 = 14). Le soluzioni sono i numeri reali x tali che $x \leq 10$, oppure tali che $x \geq 14$ ossia quelli della semiretta aperta $(-\infty, 10)$ e quelli della semiretta aperta $(14, \infty)$.



A.1.7. Elevamento a potenza

A.1.7.1. Potenze ad esponente intero.

Se k è un numero naturale definiamo a^k (a alla k) come

$$a^k = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{k \text{ volte}}$$

Se $k = 0$ si pone $a^0 = 1$. Se $k < 0$ si pone $a^k = 1/a^{-k}$. Come casi particolari notiamo a^2 che si legge anche a al quadrato e a^3 che si legge a al cubo per la ovvia interpretazione geometrica.[26]

Tabella A.1.1. Proprietà fondamentali delle potenze.

- $a^k * a^l = a^{k+l}$ prodotto di potenze con la stessa base
- $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$ rapporto di potenze con la stessa base
- $a^k * b^k = (a * b)^k$ prodotto di potenze con lo stesso esponente
- $(a^k)^l = (a)^{k*l}$ potenza di potenza

A.1.7.2. Radici.

Sia assegnato $y > 0$. Se x è un numero positivo tale che $x^n = y$ allora x è la radice (aritmetica) n-esima di y indicata con[27]

$$x = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$$

Se $n = 2$ abbiamo la **radice quadrata**: dalla geometria elementare, sappiamo che, assegnato un quadrato di area a, la radice quadrata di a, indicata con $\sqrt{a}$, è la lunghezza del lato di tale quadrato. Questo presuppone ovviamente che sia a che $\sqrt{a}$ (rappresentando rispettivamente aree e lunghezze) siano numeri reali positivi. Quindi, dato un numero reale a positivo, $\sqrt{a}$ è quel numero positivo il cui quadrato è uguale

---

[26] In R

```
2^3
2**3 ## altra notazione
```

[27] Si noti che questa definizione è solo apparentemente semplice: per calcolare $2^{1/10}$ serve risolvere l'equazione $x^{10} = 2$.

ad a. Naturalmente esiste anche un numero negativo il cui quadrato è uguale ad a, ed è $-\sqrt{a}$. Per convenzione, si assume che sia $\sqrt{0} = 0$. Diremo quindi che la radice quadrata di 9 è $\sqrt{9} = 3$, mentre i numeri il cui quadrato è 9 sono 3 (la radice quadrata) e -3 (il suo opposto). Sono invece del tutto prive di senso (nè vere né false, quindi non-matematica) affermazioni del tipo «la radice quadrata di 9 è più o meno 3», in simboli $\sqrt{9} = \pm 3$, se non altro perché se fosse vero che $\sqrt{9} = 3$ e che $\sqrt{9} = -3$ si dedurrebbe per transitività l'assurdo $3 = -3$. Quindi le due uguaglianze $\sqrt{9} = 3$ e $\sqrt{9} = -3$ non possono essere entrambe vere (in effetti è vera solo la prima). Si noti che $\sqrt{a^2} = |a|$

A.1.7.3. Potenze ad esponente frazionario.

Possiamo definire le potenze con esponente razionale (frazionario) come

$$x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$$

Per esempio $8^{2/3} = (8^2)^{1/3} = 64^{1/3} = 4$ o anche $8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$.

A.1.7.4. Potenze ad esponente reale.

Resta il problema dare un senso ad espressioni come 2^π ossia quando l'esponente non è razionale. La materia è qui delicata, possiamo intuire che «buone» approssimazioni razionali di π conducano a buone approssimazioni di 2^π. Potremmo considerare per esempio la limitazione

$$2^{314/100} < 2^\pi < 2^{315/100}$$

e stabilire un range di valori ammissibili per 2^π e migliorarlo arbitrariamente, usando più cifre decimali di π; il fatto di aver definito concettualmente operazioni come $2^{314/100}$ non porta però alcun vantaggio pratico: il calcolo della radice centesima di 2 (e la determinazione della potenza 314 - o 315- di tale radice) è altrettanto problematico della definizione di 2^π; tanto vale accettare che in situazioni come queste, ravvisata la difficoltà, ci si possa affidare ad uno strumento di calcolo, come R. L'espressione x^γ con esponente reale può essere definita anche attraverso la funzione esponenziale di base e (vedi p. 154) ma questo non sposta la questione.

A.1.8. La priorità delle operazioni

Nelle operazioni che seguono oltre ai calcoli sottolineiamo l'importanza di rispettare la priorità delle operazioni. Chi studia verifichi in modo indipendente i risultati

$$3/4 - 5 = (3/4) - 5 = \frac{3 - 20}{4} = -17/4$$

$$3 * 4^5 - 7 = 3 * (4^5) - 7 = 3065$$

$$4^2 + 7/3 + 2 = (4^2) + (7/3) + 2 = 16 + 7/3 + 2 = 61/3$$

$$2^{2^3} = 2^{(2^3)} = 2^8 = 256$$

$$2\hat{\ }2\hat{\ }3 = 256$$

$$\frac{3 + 4}{5 + 7} = 7/12$$

n= 0						1					
n= 1					1		1				
n= 2				1		2		1			
n= 3			1		3		3		1		
n= 4		1		4		6		4		1	
n= 5	1		5		10		10		5		1

Figura A.1.2. Il triangolo di Pascal. Il k-esimo (partendo da $k = 0$) numero nella riga n indica il coefficiente del termine $a^{n-k}\, b^k$ nello sviluppo di $(a + b)^n$.

$$
\begin{aligned}
&3 + 4/5 + 7 = \frac{15 + 4 + 35}{5} = 54/5 \\
&6 * 3^2 = 6 * (3^2) = 54 \\
&6 * 3/2 + 3 = 12 \\
&6 + 4/2 + 3 = 6 + 2 + 3 = 11 \\
&3/1 + x^2 = 3 + x^2
\end{aligned}
$$

L'assenza del simbolo di moltiplicazione fa sì che talora si associ il 4 ad a in espressioni come $1/4a$ che viene pertanto inteso a volte come $1/(4a)$, o come $(1/4)a$.[28]

Relazioni algebriche fondamentali. Richiamiamo alcune relazioni algebriche che riteniamo sia doveroso ricordare:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{A.1.2}$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b \tag{A.1.3}$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \tag{A.1.4}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{A.1.5}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,a\,b^2 - b^3 \tag{A.1.6}$$

Per $(a + b)^n$ con n generico si ricorre al **triangolo di Pascal**, vedi Figura A.1.2.[29]

Esercizi e complementi

[28] Questa possibile fonte di ambiguità non si presenta in R: il simbolo di moltiplicazione $*$ è espressamente richiesto e la sua omissione è uno degli errori più comuni.

[29] In Italia è anche chiamato triangolo di Tartaglia, ma è apparentemente dovuto al matematico cinese JIA XIAN ($\sim$ 1010-1070).

1. Calcolare manualmente

1. $8^{1/3} = \sqrt[3]{8}$	*3.* $100^{1/2}$	*5.* $625^{1/4}$
2. $16^{1/2}$	*4.* $16^{1/4}$	*6.* $1000000^{1/3}$

2. Calcolare manualmente

1. $4^{3/2}$	*3.* $16^{5/4}$	*5.* $125^{2/3}$
2. $27^{-5/3}$	*4.* $8^{4/3}$	*6.* $1000000^{2/3}$

3. Sviluppare

1. $(3\,x-2)^3$	*3.* $(2\,x+3\,y)^3$	*5.* $(6\,x-2\,y)^3$
2. $(3-2\,x)^3$	*4.* $(5\,x-4)^2$	*6.* $(x-4)^5$

4. Semplificare le seguenti espressioni

1. $\dfrac{x}{x+4} - \dfrac{x-4}{x}$	*3.* $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-b^2} - \dfrac{(a+b)^4}{(a+b)^2} - 2a(b-\dfrac{1}{3})$
2. $\dfrac{x}{x-4} - \dfrac{x-2}{4-x}$	*4.* $\dfrac{x^6-y^6}{x^2-y^2}$

5. Calcolare manualmente $574^2 - 426^2$ senza svolgere i quadrati.

A.1.9. Rappresentazione dei numeri

Le potenze del 10 sono fondamentali per capire la rappresentazione decimale; per esempio

$$423 = 4 * 10^2 + 2 * 10 + 3 * 10^0$$

e

$$1.34 = 1 * 10^0 + 3 * 10^{-1} + 4 * 10^{-2}$$

Usando le potenze del 10 possiamo spostare il separatore decimale (punto o virgola che sia)[30]

$$123 = 12.3 * 10 = 1.23 * 10^2 = 0.123 * 10^3$$

$$123456 = 12345.6 * 10 = 1234.56 * 10^2 = \ldots = 1.23456 * 10^5$$

$$0.00789 = 0.0789 * 10^{-1} = 0.789 * 10^{-2} = 7.89 * 10^{-3}$$

Lo spostamento del punto decimale di k posizioni a sinistra equivale alla moltiplicazione per 10^k.
Lo spostamento del punto decimale di k posizioni a destra equivale alla moltiplicazione per 10^{-k}.

[30] Talora parleremo di virgola come separatore decimale anche se abbiamo usato il punto.

Notazione scientifica e spostamenti del separatore decimale

Notazione scientifica e cifre significative. Nella notazione scientifica, la stesura di un numero inizia con una cifra diversa da 0 seguita dal separatore decimale e dalle altre cifre moltiplicata per l'opportuna potenza del dieci: per esempio $6357 = 6.357 * 10^3$. Le cifre necessarie a scrivere il numero in notazione scientifica sono le cifre significative. Numeri molto grandi o molto prossimi a zero sono scritti convenientemente usando la notazione scientifica, per esempio[31]

$$\text{uma} = 0.00000000000000000000000000166054 = 1.66054 * 10^{-27}\text{kg}$$

Uso delle potenze del 10 nello svolgimento di semplici operazioni. Talora operazioni che coinvolgono un elevato numero di cifre si possono risolvere agevolmente usando le opportune potenze del 10; per esempio

$$12000000/0.0003 = 12 * 10^6/(3 * 10^{-4}) = 4 * 10^{10}$$

$$(0.00001 * 0.04)/0.002 = 10^{-5} * 4 * 10^{-2}/(2 * 10^{-3}) = 2 * 10^{-4}$$

$$(300 * 100000)/0.15 = 3 * 10^2 * 10^5/(15 * 10^{-2}) = 1/5 * 10^9 = 2 * 10^8$$

Arrotondamento

Arrotondamento. In diverse situazioni non tutte le cifre di un numero hanno rilievo ed è non solo pratico ma anche necessario ridurre il numero di cifre che usiamo per rappresentarlo. Supponiamo di voler rappresentare un numero (per semplicità positivo) con un certo numero k di cifre a destra del separatore decimale. Troncamento (o arrotondamento per difetto): si taglia il numero in corrispondenza al numero di cifre scelto. Con l'arrotondamento per eccesso, al risultato del troncamento si aggiunge 1 all'ultima cifra conservata. L'arrotondamento consiste nel prendere tra i due, il valore più vicino al valore originale.[32] Nel caso in cui il valore in esame sia equidistante dall'arrotondamento per difetto e da quello per eccesso (per esempio 3.65 o 7.75 se si desidera arrotondamento a 2 cifre, o al primo decimale), occorre definire una procedura. Per esempio tra i due possibili casi si può decidere di scegliere quello la cui ultima cifra è pari (nell'esempio: 13.6 e 13.8). Il numero originale differisce in genere da quello arrotondato e quindi abbiamo determinato un errore di arrotondamento.

---

[31] In R possiamo evitare la notazione scientifica con l'opzione `options(scipen=999)`.

[32] In R possiamo usare i comandi `floor` (già introdotto nella nota a p. 5 per il troncamento e `ceiling` per l'arrotondamento per eccesso; per esempio con $k = 4$ cifre dopo il separatore decimale

```
k=4
floor(10^k*pi)/10^k
## [1] 3.1415
ceiling(10^(k)*pi)/10^(k)
## [1] 3.1416
```

Possiamo poi usare `round(x,k)` per l'arrotondamento. Se vogliamo arrotondare eliminando cifre a sinistra del separatore decimale usiamo `round(x,k)` con k negativo

```
round(pi,k)
## [1] 3.1416
round(123,-2)
## [1] 100
```

Esempi di arrotondamento (alla seconda cifra decimale dopo il separatore decimale):

$15.23 \to 15.23$	$15.225 \to 15.22$ (caso di equidistanza)
$15.2256 \to 15.23$	$15.215 \to 15.22$ (caso di equidistanza)
$17.23255 \to 17.23$	$15.205 \to 15.20$ (caso di equidistanza)

Negli esercizi i calcoli vanno eseguiti conservando il massimo numero di cifre significative possibili. Alla fine la riposta va arrotondata alle cifre veramente significative per il contesto (o nell'esercizio).

Esercizi e complementi

1. Attenzione alla rappresentazione dei numeri negli strumenti di calcolo; neanche R sfugge a questa problematica. Per esempio

```
1/3
## [1] 0.3333333
1/3*3
## [1] 1
```

ma eseguendo un «copia e incolla»

```
0.3333333*3
## [1] 0.9999999
a = 100000000
a
## [1] 1e+08
b = a-1
b
## [1] 1e+08
a-b
## [1] 1
```

e quindi non è vero che $a = b$ anche se le rappresentazioni a schermo coincidono. Si noti altresì che R usa le potenze del 10 per rappresentare il numero e per esempio $2.37e + 8$ significa $2.37 * 10^8 = 237000000$.

2. La successione che inizia con il valore $a(1) = 1/7$ e in cui il valore successivo è definito come $a(i + 1) = a(i) * 8 - 1$ dovrebbe avere tutti i valori eguali ad 1/7 (provare per credere). Ma se lo facciamo con R

```
a = 1/7
for (i in 1:30) a[i+1] = a[i]*8-1
a[1:31]
##  [1]  1.428571e-01  1.428571e-01  1.428571e-01
##  [4]  1.428571e-01  1.428571e-01  1.428571e-01
##  [7]  1.428571e-01  1.428571e-01  1.428571e-01
## [10]  1.428571e-01  1.428571e-01  1.428571e-01
## [13]  1.428566e-01  1.428528e-01  1.428223e-01
## [16]  1.425781e-01  1.406250e-01  1.250000e-01
## [19]  0.000000e+00 -1.000000e+00 -9.000000e+00
## [22] -7.300000e+01 -5.850000e+02 -4.681000e+03
## [25] -3.744900e+04 -2.995930e+05 -2.396745e+06
## [28] -1.917396e+07 -1.533917e+08 -1.227134e+09
## [31] -9.817068e+09
```

incontriamo dei seri problemi.

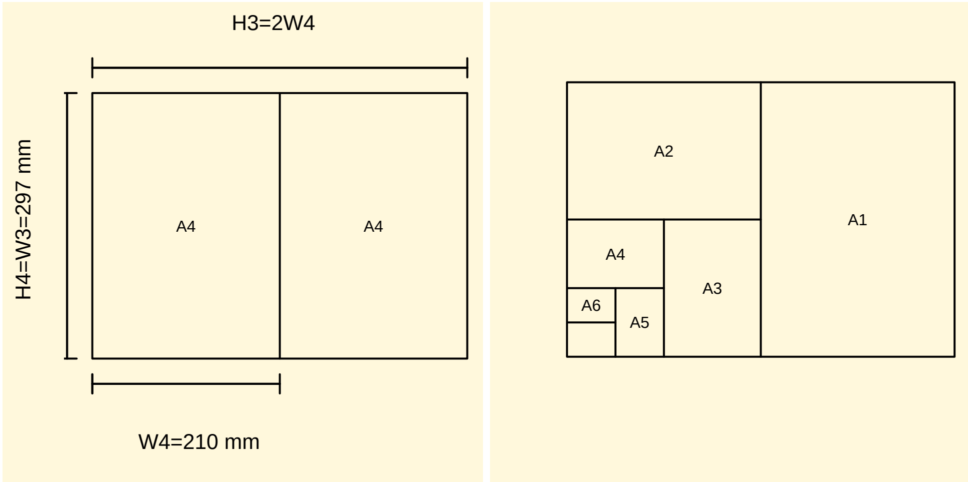


Figura A.1.3. Formati standard dei fogli di carta. Unendo due fogli A1 si ottiene un foglio A0 di dimensione 1 m^2. Verificarlo.

3. Trovare 2 numeri che differiscono per $2 * 10^{-6}$ e il cui arrotondamento all'intero più prossimo differisce di 1.

A.1.10. Proporzioni

- Nel quadro d'unione dell'Atlante stradale d'Italia del TCI, una carta geografica a scala $1 : 2000000$, la distanza fra Napoli e Palermo è circa di 15.5 cm. La distanza reale x in cm verifica la proporzione $1 : 2000000 = 15.5 : x$ (1 sta a 2 000 000 come 15.5 sta ad x).
- La sezione aurea di un segmento di lunghezza a è un segmento la cui lunghezza x verifica la proporzione $a : x = x : (a - x)$.
- Un foglio A4 ha dimensioni W4 = 210 mm, e H4 = 297 mm. Accostandone due (per il lato più lungo) si ottiene un foglio A3 di dimensioni H4 = W3 = 297 mm e H3 = W4 + W4 = 420 mm, per le quali vale (approssimativamente) la proporzione H4 : W4 = H3 : W3. Infatti H4 : W4 = 297 : 210 = 1.414, mentre H3 : W3 = 420 : 297 = 1.4141. Lo stesso gioco vale per i formati tutti i formati Axx, vedi Figura A.1.3

Una proporzione

$$a : b = c : d$$

indica semplicemente che il rapporto a/b è uguale al rapporto c/d, ossia che si ha $a/b = c/d$. Talvolta si dice discorsivamente che i valori a, b ed i valori c, d sono in proporzione. Per verificare la proporzione possiamo procedere in due modi:

(1) Eseguire direttamente le due divisioni a/b e c/d, e verificare che danno lo stesso risultato (come abbiamo fatto per verificare che i lati di un foglio A4 ed i corrispondenti lati di un foglio A3 sono in proporzione).

(2) Alternativamente, osservando che $a/b = c/d$ equivale a $a/b - c/d = 0$, e questa a

$$\frac{ad - bc}{bd} = 0$$

ed ancora ad $ad - bc = 0$, basta eseguire le due moltiplicazioni ad e bc e verificare che danno lo stesso risultato. Poiché le moltiplicazioni sono di norma più facili delle divisioni, è diventato popolare verificare la proporzione verificando che il prodotto $b * c$ dei termini medi è uguale al prodotto $a * d$ dei termini estremi.

- Per risolvere $1 : 2000000 = 15.5 : x$ usiamo la tecnica alternativa, ossia $2\,000\,000 * 15.5 = x * 1$, quindi $x = 31\,000\,000$, cm $= 310\,000\,\mathrm{m} = 310\,\mathrm{km}$.
- Per calcolare la sezione aurea x di A occorre «risolvere» $a : x = x : (a - x)$ ossia, con la tecnica alternativa, occorre risolvere $x^2 = a(a - x)$, ossia

$$x^2 + a\,x - a^2 = 0$$

- Se vogliamo tagliare un rettangolo di carta di lati $h > w$ in modo che accostandone due uguali per il lato lungo h si ottenga un rettangolo con i lati $2w > h$ nello stesso rapporto, dobbiamo risolvere la proporzione $h : w = 2w : h$, ossia $2w^2 = h^2$ da cui $(h/w)^2$ ed $h/w = \sqrt{2} = 1.4142136$. Il rapporto ideale fra il lato lungo e quello corto dei fogli della serie A5, A4, A3, ecc. è $\sqrt{2}$ in pratica 1.414.
- I teoremi di Euclide si esprimono attraverso proporzioni. Il **primo teorema di Euclide** afferma che in un triangolo rettangolo un cateto è il medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa. Il secondo teorema di Euclide afferma che in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è il medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

A.1.10.1. Percentuali.

Il 4% di 2800 € è 112 €. Come mai? L'idea è che si ottiene il 4% di un certo importo prelevando 4 unità da ogni gruppo di 100. Occorre immaginare l'importo di 2800 € in banconote da 100 €, e prelevare 4 per ogni banconota, ossia «quattro per (ogni) cento». Praticamente per calcolare il 4% di 2800 € dobbiamo risolvere la proporzione $x : 2800 = 4 : 100$, quindi, per la solita regola «prodotto dei medi uguale prodotto degli estremi»

$$x = 2800 * \frac{4}{100} = 2800 * 0.04 = 112$$

Regole pratiche. Se parliamo in astratto del $k\%$ di una quantità X_0 assegnata, k deve essere un numero (non obbligatoriamente intero) fra 0 e 100. Il $k\%$ di X_0 è uguale a

$$Y_0 = X_0 \frac{k}{100}$$

Aggiungendo il $k\%$ ad una quantità X_0 otteniamo

$$X_0 + X_0 \frac{k}{100} = X_0(1 + k/100)$$

Quindi:

Aggiungere il $k\%$ ad una quantità equivale a moltiplicare per $(1 + k/100)$.
Togliere il $k\%$ ad una quantità equivale a moltiplicare per $(1 - k/100)$

- Due gemelli, Karl e Peggy, pesavano entrambi 54 kg il giorno di Capodanno del 2016. Durante il 2017, Karl è dimagrito del 5%, mentre Peggy è aumentata del 5%. Nel 2018 invece, Karl è aumentato del 5% e Peggy è dimagrita del 5%. Verificare che Karl e Peggy hanno lo stesso peso il giorno di Capodanno del 2018. Infatti, al Capodanno del 2018 Karl pesava

$$54 * (1 - 5/100) * (1 + 5/100) = 54 * (1 - (5/100)^2) = 53.9325$$

e Peggy lo stesso (per proprietà commutativa della moltiplicazione)

$$54 * (1 + 5/100) * (1 - 5/100) = 54 * (1 - (5/100)^2) = 53.9325$$

Si noti che il peso finale è inferiore al peso iniziale. La somma non è un'operazione naturale per le percentuali!

- In un ospedale il 3% dei pazienti ha una determinata patologia. Il 2% di tali pazienti ha meno di 3 anni. Qual è la percentuale dei minori di 3 anni con la patologia? Attenzione: occorre fare il prodotto 3% ∗ 2% ma questo non è il 6% bensì

$$3\% * 2\% = 3/100 * 2/100 = 6/10000 = 0.06\%$$

A.2. Il piano cartesiano

Anche il piano è un concetto primitivo per Euclide; come abbiamo fatto per la retta vogliamo caratterizzare numericamente i punti del piano; per realizzare questo obiettivo scegliamo un **sistema di riferimento cartesiano**: due rette orientate (asse X ed asse Y) ed un'unità di misura per ciascuno dei 2 assi. Il punto di intersezione delle due rette viene chiamato origine ed indicato di solito con la lettera O; assumeremo qui che le rette siano perpendicolari; non assumiamo invece che le unità di misura dei due assi siano uguali; abbiamo quindi a che fare in genere con un sistema di assi in genere dimetrico.

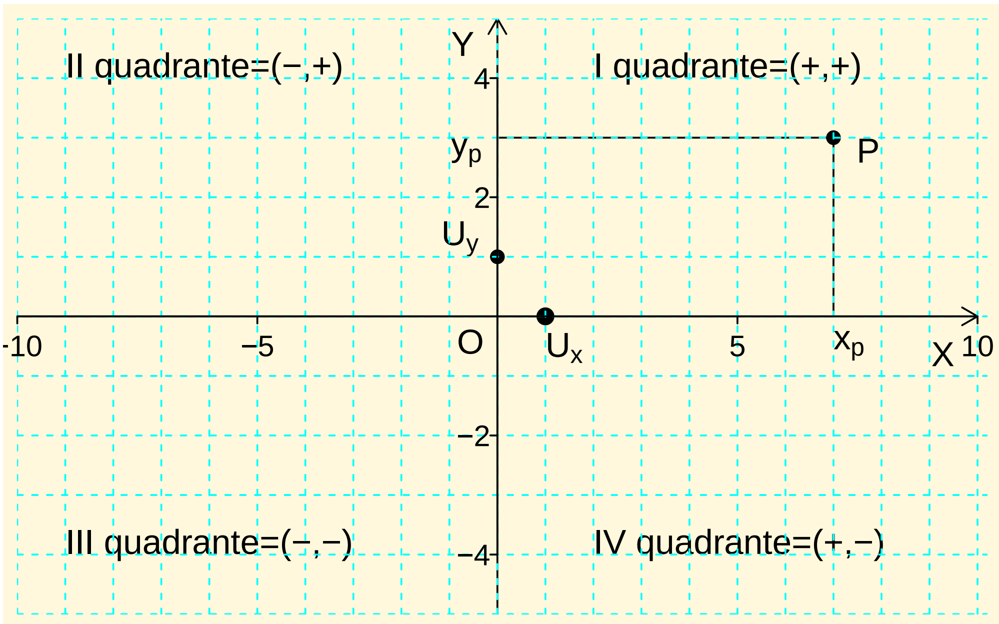


Figura A.2.1. Il piano cartesiano. Il punto P ha coordinate (7,3). I punti U_x ed U_y individuano le unità di misura sui due assi.

Assegnato un punto P nel piano le rette perpendicolari agli assi passanti per il punto P intersecano gli assi X e Y in 2 punti; i numeri (x_P, y_P) associati a tali intersezioni (determinati come nel caso della retta reale) sono le **coordinate** del punto P; in tal modo al punto viene associata una coppia ordinata di numeri reali. Il primo di tali numeri è chiamato **ascissa**, il secondo **ordinata** o quota. Scriveremo $P = P(x_P, y_P)$ o brevemente $P = (x_P, y_P)$. Il piano viene diviso dai due assi in 4 regioni dette **quadranti** caratterizzate dai segni delle ascisse e delle ordinate, come in Figura A.2.1. Il piano cartesiano viene spesso usato per rappresentare un piano effettivamente di tipo spaziale ma talora è un artificio per rappresentare una coppia di variabili di natura arbitraria (per esempio massa e temperatura). In tal caso parecchi concetti geometrici che appaiono naturali quando si usano lunghezze perdono di significato.

Segmenti nel piano. Data una coppia di punti $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ nel piano il segmento $\overline{PQ}$ che li unisce ha una lunghezza PQ pari alla distanza $d(P, Q)$ dei 2 punti P e Q

Lunghezza di un segmento

$$PQ = d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

Il punto medio M di $\overline{PQ}$ si ottiene prendendo la media delle ascisse e la media delle ordinate

$$M = (x_M, y_M) = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}\right)$$

Pendenza di un segmento

La **pendenza** m di un segmento è definita come incremento di ordinata diviso differenza di ascissa

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$$

e rappresenta l'aumento di ordinata (quota) per un aumento unitario dell'ascissa; pendenze negative corrispondono quindi a quote che diminuiscono aumentando l'ascissa (guardando da sinistra a destra si va in discesa). Un segmento verticale non ha pendenza.[33]

Il rettangolo e il prodotto cartesiano di intervalli. Abbiamo già considerato il prodotto cartesiano di due insiemi. Se consideriamo 2 intervalli (a, b) e (c, d), il loro prodotto cartesiano

$$R = (a, b) \times (c, d)$$

è il rettangolo costituito dai punti con coordinate (x, y) che verificano le condizioni $a < x < b$ e $c < y < d$. $(0, 1) \times (3, 5)$ non è il prodotto $0.1 * 3.5 = 0.35$ ma il rettangolo con ascisse comprese tra 0 e 1 e ordinate tra 3 e 5.

A.2.1. Curve nel piano

In questa sezione vedremo come caratterizzare in modo algebrico e geometrico alcune semplici curve nel piano.

[33] Qualcuno dice che un segmento verticale ha pendenza infinita. Qui preferiamo dire che tali segmenti non hanno pendenza: ciò è concorde col linguaggio comune, nel quale si afferma che la Torre di Pisa pende, mentre, se fosse dritta, si direbbe semplicemente che non pende, e non che ha pendenza infinita.

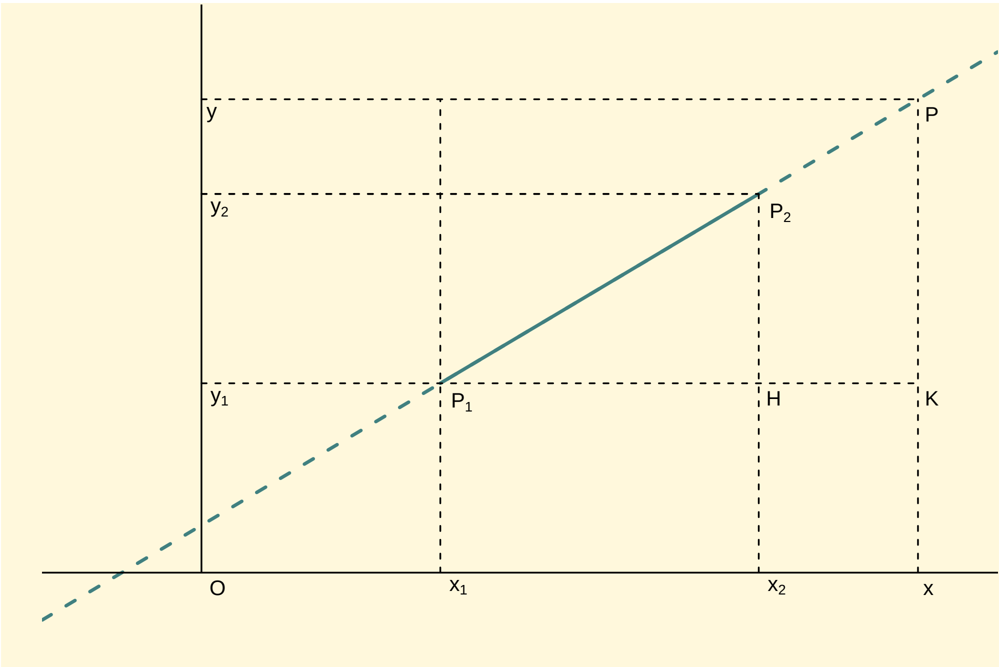


Figura A.2.2. Retta passante per i punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. La sua equazione è $y = mx + q$ dove, $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ e $q = y_1 - m\,x_1$.

A.2.1.1. La retta

Due punti P_1 e P_2 nel piano individuano una retta. Vogliamo determinare il legame tra ascissa x e ordinata y di un generico punto $P = P(x, y)$ del piano soddisfatto se e solo se il punto sta sulla retta. Questa relazione è chiamata **equazione della retta**.

Caso 1. Se i punti P_1 e P_2 hanno la stessa ascissa x_1 (e quindi ordinate diverse altrimenti sarebbero un solo punto) si trovano su una retta verticale. L'equazione della retta è allora semplicemente $x = x_1$.

Caso 2. Se i punti P_1 e P_2 hanno la stessa ordinata y_1 (e quindi ascisse diverse altrimenti sarebbero un solo punto) si trovano su una retta orizzontale. L'equazione della retta è allora semplicemente $y = y_1$.

Caso 3. Se i punti P_1 e P_2 hanno ascisse ed ordinate diverse allora siamo nella situazione della Figura A.2.2 (il risultato vale anche se i due punti hanno la stessa quota, incorporando quindi il caso 2). Se il punto P appartiene alla retta (e solo in tal caso) i triangoli rettangoli PKP_1 e P_2HP_1 sono simili; ne segue la proporzione

$$PK : P_1K = P_2H : P_1H$$

e quindi

$$(y - y_1) : (x - x_1) = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$$

Riconosciamo a destra la pendenza m del segmento per i punti P_1 e P_2

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m\,(x - x_1) \Rightarrow y = m\,x + y_1 - mx_1 = m\,x + q$$

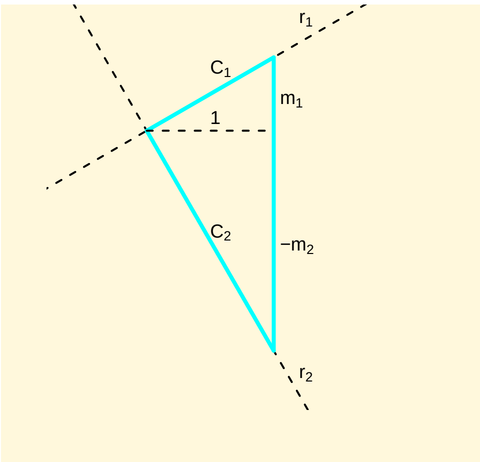


Figura A.2.3. La pendenza della retta r_1 è pari alla proiezione m_1 del cateto C_1 sull'ipotenusa del triangolo rettangolo. La pendenza della retta r_2 è pari alla proiezione m_2 (cambiata di segno) del cateto C_2 sulla base del triangolo rettangolo. Per il II teorema di Euclide $m_1 * m_2 = -1$.

avendo definito $q = y_1 - m\,x_1$. Nel caso 1 è impossibile ricondursi ad una equazione del tipo $y = m\,x + q$.

Per determinare l'equazione

$$y = mx + q$$

della retta che passa per i punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ si determina la pendenza

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e poi l'intercetta

$$q = y_1 - m\,x_1$$

Abbiamo visto che la relazione tra variabili del tipo $y = mx + q$ (per fissati valori di m e di q) ha una semplice rappresentazione grafica: una retta nel piano. La relazione in esame è un primo esempio di funzione, in questo caso una funzione lineare; rimandiamo la definizione di funzione, ma provvisoriamente diremo funzione una relazione che ad ogni valore di x (in un certo insieme D_X) associ attraverso una formula $f(x) = \ldots$ un unico valore $y = f(x)$ in un altro insieme D_Y e diremo grafico della funzione l'insieme dei punti nel piano del tipo $(x, f(x))$ al variare di x in D_X.

Esercizi e complementi

1. Disegnare la retta di equazione $y = 4\,x - 7$ evidenziandone le intersezioni con gli assi.
2. In un sistema di assi monometrico 2 rette sono perpendicolari se e solo se il prodotto delle loro pendenze è -1. Lasciamo a chi studia l'interpretazione della dimostrazione grafica riportata in Figura A.2.3. Rette perpendicolari
3. Si dimostri che la distanza del punto $P = (x_0, y_0)$ dalla retta $ax + by + c = 0$ è pari a

$$d = \frac{|\ ax_0 + by_0 + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distanza punto retta

A.2.1.2. Trinomio di secondo grado e parabola

Il trinomio di secondo grado. Il trinomio di secondo grado è l'espressione

$$a\,x^2 + b\,x + c, \quad a \neq 0$$

nella variabile x reale. Per diverse considerazioni che seguiranno è utile riscrivere il trinomio come

$$\begin{gathered} ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}\right) = \\ a\left(X^2-\frac{\Delta}{4\,a^2}\right) = aX^2-\frac{\Delta}{4a} \end{gathered} \tag{A.2.1}$$

dove

Discriminante

$$\begin{cases} X = x + \frac{b}{2a} \\ \Delta = b^2 - 4ac \quad \text{(discriminante).} \end{cases}$$

Completamento del quadrato

La tecnica adottata è nota come completamento del quadrato.

Esempio A.2.1. Nel trinomio $y = 2x^2 + 4x + 5$ possiamo identificare $a = 2, b = 4$ e $c = 5$, quindi $b/(2a) = 1$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 * 2 * 5 = -24$. Il trinomio può allora essere riscritto come

$$2\,x^2 + 4\,x + 5 = 2(x+1)^2 + \frac{24}{8} = 2(x+1)^2 + 3$$

Radici del trinomio. Eguagliando a zero il trinomio uguale otteniamo l'**equazione di secondo grado**

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Per risolverla ricorriamo alla riscrittura A.2.1

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\,a^2}$$

Risoluzione dell'equazione di secondo grado

Quindi

- Se $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$ non ci sono soluzioni (in quanto un quadrato non può essere negativo).
- Se $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 0$ l'equazione diventa $(x + \frac{b}{a})^2 = 0$; questo può accadere solo se $x + \frac{b}{a} = 0$, quindi in tal caso esiste una sola soluzione $x_1 = -\frac{b}{a}$.
- Se $\Delta = b^2 - 4\,a\,c > 0$ vi sono due numeri[34] che elevati al quadrato danno $\frac{\Delta}{4\,a^2}$, e sono $w_1 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ e $w_2 = +\frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ Quindi abbiamo $x + b/2a = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ e quindi

[34] Etimologicamente il termine discriminante, indica la sua capacità di discriminare, ossia di distinguere; qui in particolare se ci sono 0, 1 o 2 soluzioni.

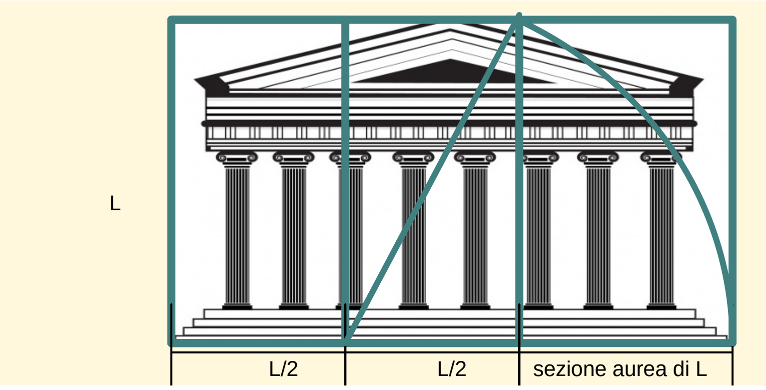


Figura A.2.4. Immagine del Partenone in scala; sono evidenziate le dimensioni lineari L (lato verticale) e la sua sezione aurea.

troviamo una prima soluzione $x_1 = -b/2a - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ oppure abbiamo $x + b/2a = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ e allora troviamo una seconda soluzione $x_1 = -b/2a + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ in totale due soluzioni, che di solito vengono compattate in una sola scrittura

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a} \tag{A.2.2}$$

Per esempio per l'equazione

$$x^2 + x - 1 = 0$$

si ha $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 * -1 = 5$ per cui abbiamo due soluzioni $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618034$ e $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618034$ di cui la seconda, quella positiva, è la sezione aurea di 1.

La sezione aurea

Ricordiamo che i rettangoli la cui altezza è la sezione aurea della base sono detti rettangoli aurei, e dal tempo di Fidia sono ritenuti i rettangoli più «bilanciati» e più belli a vedersi: in Figura A.2.4[35] l'immagine della facciata del Partenone inscritta in un rettangolo di base 76 mm e altezza 47 mm (si ha $47/76 = 0.6184211$.)

Fattorizzazione del trinomio. Se $\Delta > 0$, usando la formula $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, dalla formula A.2.1 si ricava subito

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right) =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se $\Delta = 0$

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_1)^2$$

dove x_1 è l'unica radice.

[35] L'immagine proviene da `Frimufilms - Freepik.com`

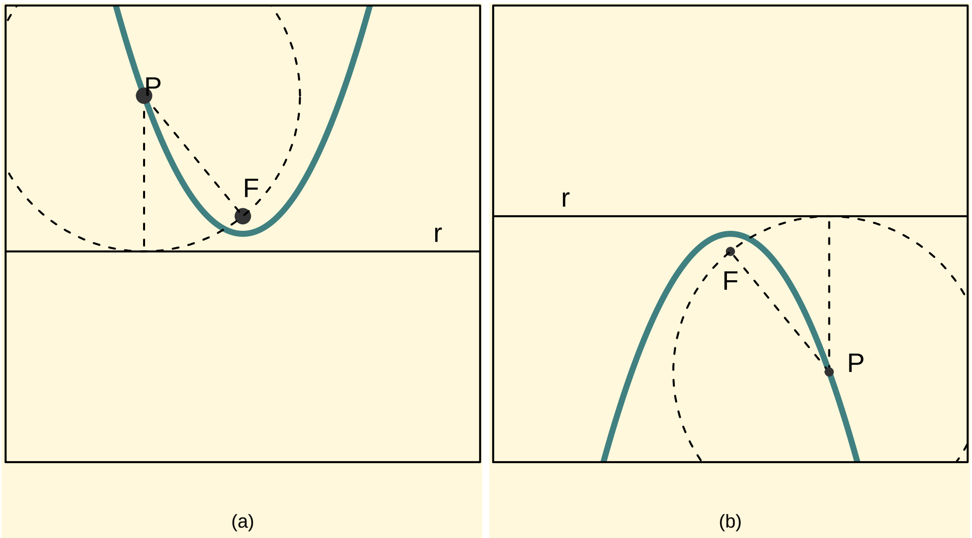


Figura A.2.5. Descrizione geometrica della parabola. I punti P della parabola hanno la stessa distanza dalla direttirce r e dal fuoco F. (a) Parabola rivolta verso l'alto. (b) Parabola rivolta verso il basso.

La parabola. I punti (x, y) del piano tali che

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

costituiscono una **parabola**. Geometricamente la parabola è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto F (**fuoco**) e da una retta r (**direttrice**), vedi Figura A.2.5.

Quando il coefficiente $a > 0$ allora la parabola è rivolta verso l'alto (come nella figura a sinistra), se il coefficiente $a < 0$ allora la parabola è rivolta verso il basso. Nel primo caso il grafico è caratterizzato dall'avere un punto a quota minima, nell'altro dall'avere un punto a quota massima; questo punto è chiamato **vertice** della parabola.
L'identità A.2.1

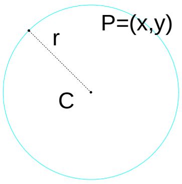
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

consente di ricavare immediatamente le coordinate del vertice V. Se, per esempio, $a > 0$ il trinomio è la somma del termine positivo $a\,(x + \frac{b}{2a})^2$ e del termine costante $-\frac{\Delta}{4a}$. Il valore minimo si ottiene quando il primo termine vale 0 ossia per $x + \frac{b}{2a} = 0$.

Vertice della parabola

Abbiamo quindi le coordinate del vertice

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$



La circonferenza. La circonferenza di centro $C = (x_c, y_c)$ e raggio r è l'insieme dei punti (x, y) del piano che hanno distanza r da C. Ricordando la formula per la distanza di 2 punti nel piano (o il teorema di Pitagora)

$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$$

o anche elevando al quadrato

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

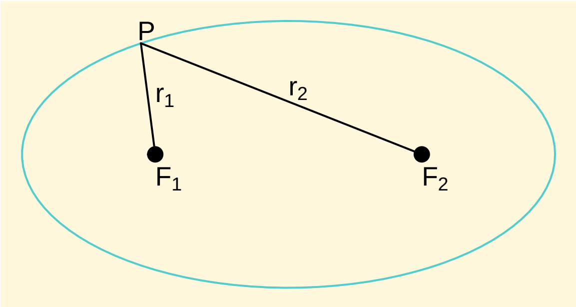


Figura A.2.6. Descrizione geometrica dell'ellisse. I punti P dell'ellisse verificano la condizione $r_1 + r_2 = k$ per un fissato valore di k superiore alla distanza dei 2 fuochi F_1 ed F_2.

Se poi procediamo ad espandere i quadrati

$$0 = x^2 + y^2 - 2x_c\,x - 2y_c\,y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = x^2 + y^2 + ax + by + c$$

a patto di identificare

$$\begin{cases} a = -2\,x_c \\ b = -2\,y_c \\ c = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \end{cases}$$

Viceversa data l'equazione di una circonferenza nella forma

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

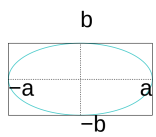
centro e raggio si trovano con le formule inverse

Centro e raggio di una circonferenza

$$\begin{cases} x_c = -a/2 \\ y_c = -b/2 \\ r^2 = x_c^2 + y_c^2 - c \end{cases}$$

Ellisse. Fissiamo 2 punti nel piano che chiameremo **fuochi**. L'ellisse è l'insieme dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze dai due fuochi abbia un valore assegnato.

L'equazione dell'ellisse (con centro l'origine) e con fuochi simmetrici rispetto all'origine su uno degli assi coordinati è



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > 0, \quad b > 0$$

Se $a = b$ l'equazione si riduce a quella di una circonferenza con centro nell'origine. Inoltre $\pm a$ sono le ascisse dei punti dell'ellisse quando $y = 0$ (e quindi il minimo e massimo valore della x) mentre $\pm b$ sono le ordinate dei punti dell'ellisse quando $x = 0$ (e quindi il minimo e massimo valore della y).

Iperbole e proporzionalità inversa. La relazione tra le variabili (x, y)

$$y = \frac{k}{x}, \qquad k \neq 0, x \neq 0 \tag{A.2.3}$$

esprime la proporzionalità inversa tra le variabili x ed y. Il grafico di tale relazione è un'**iperbole rettangolare**, composta da due rami come in Figura A.2.7.

A seconda del valore di k tali rami occupano il primo e terzo quadrante ($k > 0$) o il secondo e quarto quadrante ($k < 0$). L'origine $O = O(0, 0)$ rappresenta il centro

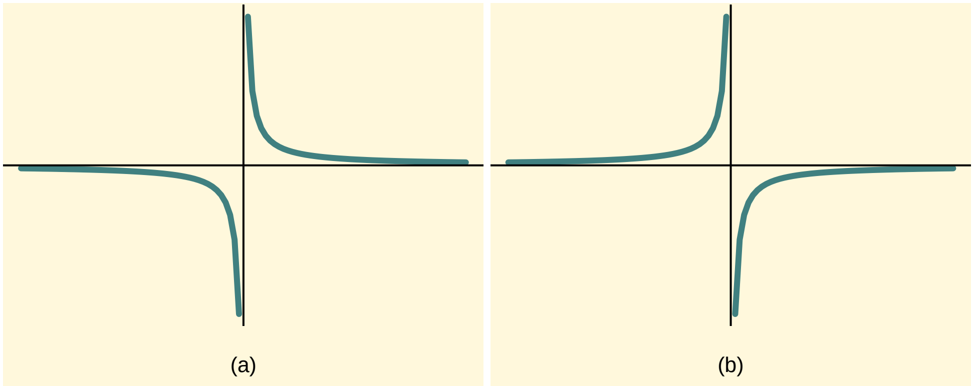


Figura A.2.7. Grafico di un'iperbole rettangolare $y = k/x$. (a) Caso $k > 0$. (b) Caso $k < 0$.

dell'iperbole. Nelle applicazioni concrete (quelle in cui x ed y significano qualcosa) spesso solo uno dei due rami ha un ruolo ben definito. La relazione A.2.1.2

$$y = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} \qquad c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$$

rappresenta a meno di traslazioni orizzontali e verticali un'iperbole rettangolare.[36] Con le traslazioni

$$\begin{cases} X = x + d/c \\ Y = y - a/c \end{cases}$$

l'equazione dell'iperbole può essere scritta

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a(X - d/c) + b}{c(x + d/c)} = \frac{aX - ad/c + b}{cX} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 X}$$

e quindi $Y = \frac{bc-ad}{c^2X} = \frac{k}{X}$ dove $k = \frac{bc-ad}{c^2}$. Il segno di $bc - ad$ discrimina dunque la situazione in cui l'iperbole occupa (nel nuovo sistema di coordinate) primo e terzo quadrante o secondo e quarto quadrante. Il suo grafico, nel caso in cui $bc - ad < 0$) ha l'andamento illustrata in Figura A.2.8 (a).

[36] Una traslazione orizzontale è descritta dal cambio di variabili $X = x + x_0$. Una traslazione verticale da $Y = y + y_0$.

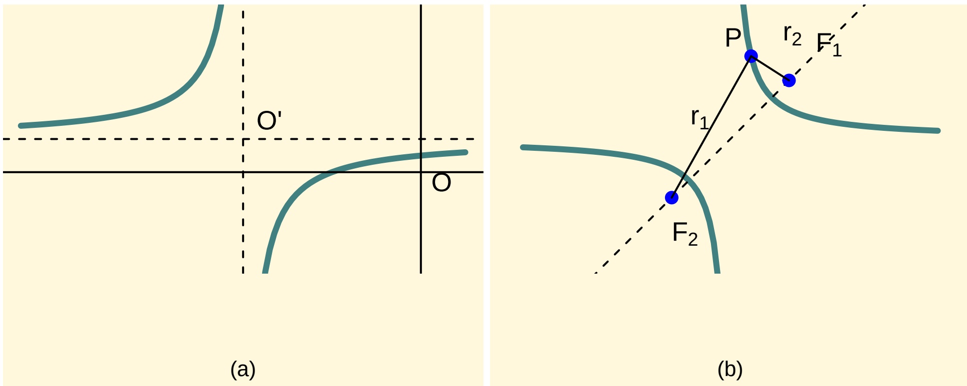


Figura A.2.8. (a) Il grafico di $y = (ax + b)/(cx + d)$. Il punto O' ha coordinate $(-d/c, a/c)$. Nel grafico $bc - ad < 0$. (b) Descrizione geometrica dell'iperbole. I punti P dell'iperbole sono caratterizzati dalla proprietà che $r_1 - r_2 = k$.

Le due rette $x = -d/c$ re $y = a/c$ sono chiamate **asintoti** dell'iperbole. Il grafico qui considerato corrisponde alla definizione geometrica di iperbole come luogo dei punti tali che la differenza delle distanze da due punti del piano, i **fuochi**, sia costante, come mostrato in Figura A.2.8 (b).

Esercizi e complementi

1. I termini parabola, ellisse, iperbole furono introdotti da APOLLONIO, matematico ed astronomo greco nato nell'antica Perga, vicina all'attuale città di Antalya, in Turchia. *Le coniche* è la sua opera più famosa; fu composta ad Alessandria (d'Egitto) a cavallo del III e del II sec. a.C. Adattando il testo di Apollonio alla terminologia moderna, le equazioni delle tre curve in questione sono caratterizzate da un parametro (che significa appunto «termine di paragone»). L'equazione della parabola è $y^2 = px$, dove p è il parametro, e si ha, per definizione, che il quadrato dell'ordinata y è uguale al prodotto del parametro per l'ascissa. Infatti *parabola* (in greco: $\pi\alpha\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$) significa sostanzialmente *uguaglianza* (tanto che nella cristianità le parabole dei Vangeli sono racconti che uguagliano un fatto del mondo reale con uno del mondo divino). Consideriamo invece un'ellisse, con asse maggiore il segmento di estremi $O = (0, 0)$ e $A = (a, 0)$ sull'asse delle ascisse; la sua equazione si può mettere nella forma $y^2 = px(1-x/a)$, dove p è il parametro, legato alla lunghezza dell'asse minore. Per tutti i punti della curva, diversi da O e da A, si ha $0 < 1 - x/a < 1$, per cui, nell'ellisse, il quadrato dell'ordinata y è minore al prodotto del parametro per l'ascissa. Infatti *ellisse* (in greco: $\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma$) significa sostanzialmente *mancanza* (per esempio nella grammatica italiana si parla di una proposizione ellittica se in essa manca il soggetto o manca il predicato o mancano entrambi). Analogamente, con un'opportuna definizione del parametro di un'iperbole, si ha per questa curva che il quadrato dell'ordinata y è maggiore al prodotto del parametro per l'ascissa. Infatti *iperbole* (in greco: $\upsilon\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$) significa *eccesso, esagerazione*.
2. Con il metodo del completamento del quadrato trovare le soluzioni della seguente equazione $x^2 + 2\,x = 8$

✂ Usare la definizione geometrica della parabola con direttrice parallela all'asse X. Dette (x_1, y_1) le coordinate del fuoco F e h la quota della direttrice si ricavi l'equazione della parabola nella forma $y = ax^2 + bx + c$ e si esprimano x_1, y_1 ed h in termini di a, b e c.

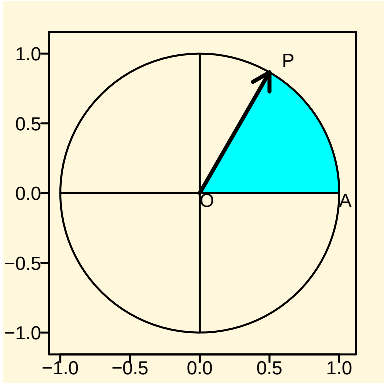


Figura A.3.1. L'angolo AOP viene identificato con la rotazione che porta la lancetta OA nella posizione OP.

3. Determinare l'equazione della circonferenza di raggio 6 e con centro nel punto $(2,3)$. Disegnare tale circonferenza. Stabilire la posizione (interno, esterno o appartenenza) dei 3 punti $(8,3)$, $(9,4)$, $(2,0)$ rispetto alla circonferenza. Determinare un ulteriore punto sulla circonferenza.
4. Determinare il centro e il raggio della circonferenza $x^2+y^2-4\,x+6\,y+12=0$.
5. Parabola, ellisse ed iperbole corrispondono anche alle curve (coniche) che si ottengono tagliando un cono con un piano. L'equazione generica di una conica è $a\,x^2+b\,xy+c\,y^2+d\,x+e\,y+f=0$; con opportune traslazioni e rotazioni ci si può ricondurre alla forma da noi considerata.
6. Nell'interazione tra due corpi celesti le traiettorie sono in genere ellittiche (orbite chiuse), ma sono anche possibili orbite aperte paraboliche o iperboliche (a seconda della velocità asintotica di allontanamento nulla o positiva), per esempio nel caso di interazione tra un pianeta e un asteroide.
7. Si consideri l'iperbole $\dfrac{2x+3}{3x+5}$. Si trovino esplicitamente le traslazioni (di asse X e Y) che la riconducano alla forma $y=k/x$.

A.3. Angoli e funzioni circolari

Assegnato un punto P sulla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiani monometrici la lancetta OA lo raggiunge dopo una certa rotazione (antioraria) spazzando l'angolo AOP.

Angoli come rotazioni

In quanto segue adotteremo una valutazione dinamica della misura di un angolo: l'angolo AOP viene identificato con la rotazione che porta la lancetta dalla posizione OA alla posizione OP. La misura più immediata per una rotazione (e quindi per gli angoli) consiste nel conteggio dei giri e relative frazioni o multipli. Parlando di rotazioni abbiamo bisogno di fissare il punto iniziale (lancetta nella posizione OA) e il verso per rotazioni positive (antiorario).

Formule di conversione gradi, giri e radianti

Conviene disporre di sottomultipli del giro: per esempio i gradi

$$1^\circ = 1 \text{ grado} = 1 \text{ giro}/360$$

L'unità di misura per gli angoli che useremo più frequentemente è la misura in **radianti** [rad]. Possiamo misurare la rotazione in esame determinando la lunghezza del cammino percorso dall'estremo mobile della lancetta, immaginando che questo ruoti su una circonferenza unitaria. Per percorrere un giro tale estremo percorre precisamente un

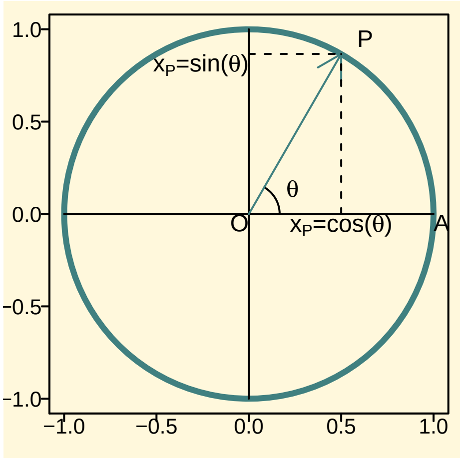


Figura A.3.2. Definizione delle funzioni circolari. L'ascissa di P è il coseno dell'angolo θ, l'ordinata è il seno dell'angolo θ.

tragitto di lunghezza pari a 2π. Quindi

$$1 \text{ giro} = 2\pi[\text{rad}] = 360°$$

o anche

Misura in radianti $= \dfrac{\pi}{180}$ Misura in gradi Misura in gradi $= \dfrac{180}{\pi}$ Misura in radianti

Come casi particolari notiamo

Angolo	giri	gradi	radianti
nullo	0	0	0
retto	$1/4$	90	$\pi/2$
piatto	$1/2$	180	π
giro	1	360	$2\,\pi$

Tabella A.3.1. Conversione di angoli particolari

A.3.1. Funzioni circolari

Consideriamo una circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine. Se il punto P è individuato dall'angolo θ possiamo definire **coseno** e **seno** dell'angolo θ (in R `cos` e `sin`).

Definizione di coseno e seno

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = \text{ascissa di } P \\ \sin(\theta) & = \text{ordinata di } P \end{cases}$$

Dalla definizione (e dal teorema di Pitagora) segue immediatamente la relazione fondamentale

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \tag{A.3.1}$$

Valori di seno, coseno e tangente per angoli particolari. Per alcuni valori dell'angolo il calcolo di coseno e seno è immediato. Se l'angolo vale 0 allora la lancetta è ad ore 3: $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$. Se l'angolo vale $\pi/2$ allora la lancetta è ad ore 6: $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$. Se l'angolo vale π allora la lancetta è ad ore 9: $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$.

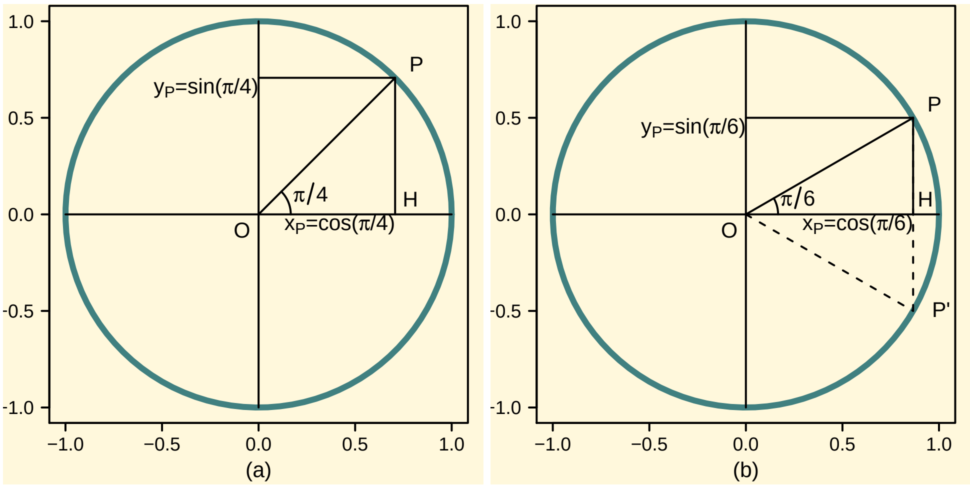


Figura A.3.3. Valori di coseno e seno per valori particolari dell'angolo. In (a) l'angolo vale $\pi/4$, in (b) l'angolo vale $\pi/6$.

Altri valori dell'angolo richiedono qualche calcolo. Con riferimento alla Figura A.3.3 (a) il triangolo POH è isoscele: $x_P = y_P$ ovvero $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$. Dalla relazione fondamentale si ricava subito

$$(\cos(\pi/4))^2 + (\sin(\pi/4))^2 = 2\,(\cos(\pi/4))^2 = 1 \Rightarrow (\cos(\pi/4))^2 = 1/2$$

e quindi $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Con riferimento al pannello (b) della stessa figura il triangolo $P'OP$ è equilatero: $PP' = 1$ e $PH = \sin(\pi/6) = 1/2$. Dalla relazione fondamentale si ricava poi $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. In modo simile si fanno i calcoli per un angolo di $\pi/3$. Definiamo anche la **tangente** di un angolo (indicata con tan) come

Definizione di tangente di un angolo

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Ricostruiamo così la tabella A.3.2

Tabella A.3.2. Valori di seno, coseno e tangente.

angolo	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	

Riportando in un grafico i punti calcolati e aiutandoci con R per completare il grafico otteniamo la Figura A.3.4, che possiamo ripetere su tutto $\mathbb{R}$ sfruttando la periodicità.

A.3.2. Forma polare

Dati numeri reali A, B qualunque (ma non entrambi nulli) e $\omega > 0$, accade spesso di incontrare funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo

$$f(t) = A\,\sin(\omega\,t) + B\,\cos(\omega\,t) \tag{A.3.2}$$

È utile saper riscrivere tale funzione nella forma polare $f(t) = E\,\sin(\omega t + \theta)$ nella quale appare una sola funzione circolare (e non due).

Tabella A.3.3. Proprietà fondamentali delle funzioni circolari.

- Periodicità:

$$\begin{cases} \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \\ \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \end{cases}$$

- Quarto di periodo:

$$\begin{cases} \cos(\theta - \pi/2) = \sin(\theta) \\ \sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta) \end{cases}$$

- Simmetrie:

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \end{cases}$$

- Formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) = & \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) = & \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) = & \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{cases}$$

- Formule di duplicazione:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = & (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2 \\ \sin(2\alpha) = & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \end{cases}$$

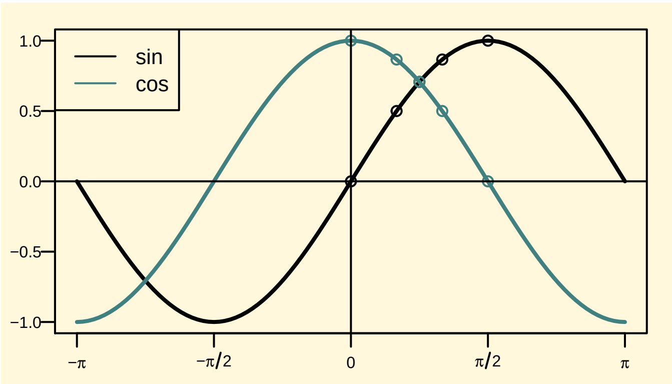


Figura A.3.4. Grafico di $f(x) = \sin(x)$ (in nero) e di $\cos(x)$ (in blu) per $-\pi \leq x \leq \pi$. I valori calcolati precedentemente sono contrassegnati con un punto.

A.3.1. Teorema. Siano dati numeri reali A, B (non entrambi nulli) e $\omega > 0$; posto $E = \sqrt{A^2 + B^2}$, si consideri il punto $P = (A/E, B/E)$ del piano e sia $0 \leq \theta < 2\pi$ la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \cos(\theta) = A/E \\ \sin(\theta) = B/E \end{cases} \tag{A.3.3}$$

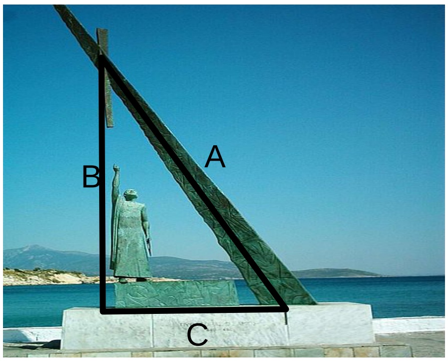


Figura A.3.5. Il porto di Samo: Pitagora ed il triangolo rettangolo.

Allora si ha

$$A\ \sin(\omega\, t) + B\ \cos(\omega\, t) = E\ \sin(\omega\, t + \theta)$$

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che, essendo

$$(A/E)^2 + (B/E)^2 = (A^2 + B^2)/E^2 = 1$$

il punto P appartiene ad alla circonferenza di raggio 1 e quindi il sistema A.3.3 è risolubile ed ha una sola soluzione θ ($0 \leq \theta < 2\pi$). Inoltre usando le formule di addizione

$$\begin{aligned}
&E\ \sin(\omega\, t + \theta)\\
&\quad = E * (\sin(\omega t)\ \cos(\theta) + \cos(\omega t)\ \sin(\theta))\\
&\quad = E * (\sin(\omega t)\ A/E + \cos(\omega t)\ B/E)\\
&\quad = A\ \sin(\omega\, t) + B\ \cos(\omega\, t)
\end{aligned}$$

■

Analogamente si può ricondurre $A\ \sin(\omega\, t) + B\ \cos(\omega\, t)$ alla forma $E\ \cos(\omega\, t + \phi)$. Si noti che dal Teorema A.3.1 segue che la funzione A.3.2 varia nell'intervallo $[-E, E]$.

A.3.3. Risoluzione dei triangoli

Richiamiamo innanzitutto il teorema di Pitagora. Con riferimento alla Figura A.3.5 abbiamo

$$A^2 = B^2 + C^2$$

La Figura A.3.6 consente di illustrare alcune proprietà dei triangoli rettangoli.

Con riferimento alla Figura A.3.6 notiamo che i triangoli rettangoli OPH e Oph sono simili: ne seguono le proporzioni

$$\begin{cases} B : A = b : 1 \\ C : A = c : 1 \end{cases}$$

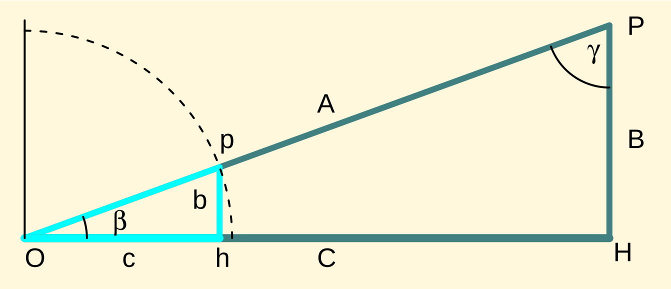


Figura A.3.6. Un triangolo rettangolo generico OPH con cateti paralleli agli assi e con un vertice nell'origine. L'arco di circonferenza tratteggiato ha raggio 1 ed è centrato nell'origine.

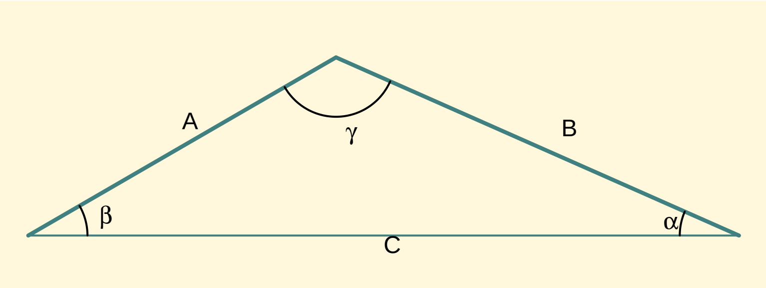


Figura A.3.7. Un triangolo generico. Convenzionalmente gli angoli opposti ai lati sono indicati con le corrispondenti lettere greche.

e poiché $b = \sin(\beta)$, $c = \cos(\beta)$ ricaviamo

$$\begin{cases} B = A\sin(\beta) \\ C = A\cos(\beta) \end{cases}$$

Dividendo termine a termine

$$\frac{B}{C} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$$

che possiamo scrivere, ricordando la definizione della tangente

$$B = C\ \tan(\theta)$$

In un triangolo rettangolo:

un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto
un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente
un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.

Triangoli generici. Con riferimento alla Figura A.3.7 valgono le relazioni

$A^2 = B^2 + C^2 + 2\,B\,C\cos(\alpha)$	teorema di Carnot
$\dfrac{\sin(\alpha)}{A} = \dfrac{\sin(\beta)}{B} = \dfrac{\sin(\gamma)}{C}$	teorema dei seni
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$	teorema di Euclide

Esercizi e complementi

1. Un tratto di strada è inclinato di 20° rispetto alla linea orizzontale. Determinare il valore assoluto della pendenza.

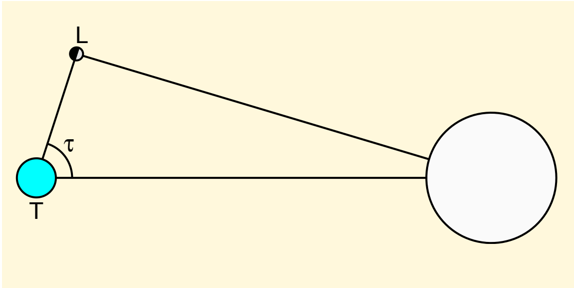


Figura A.3.8. Schematizzazione del problema di Aristarco di Samo. L'angolo in L (Luna) è retto. Noto l'angolo tra le linee TS, Terra-Sole e TL, Terra-Luna ($87°$) come si può stimare il rapporto delle distanze della terra dal Sole e della Terra dalla Luna?

2. Aristarco di Samo nel III secolo a. C. affronta il seguente problema: «Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante; quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?» In altre parole siamo nella situazione della Figura A.3.8 in cui dobbiamo calcolare il rapporto TS/TL tra i cateti del triangolo rettangolo LTS, rettangolo in L, di cui si conosce l'angolo $\tau = 87°$ e si vuol ricavare il rapporto TS/TL? a. calcolare il rapporto AS/AL con l'angolo $\tau = 87°$; b. calcolare il rapporto AS/AL, con le attuali misure che forniscono $\tau_C = 89°51'$; c. confrontare i risultati ottenuti.

3. Dalla cima di una torre alta 70 m si vede la base di un palazzo sotto un angolo di 15 gradi rispetto all'orizzontale. Quanto dista il palazzo dalla torre?

4. Inclinazione dei pannelli solari. L'angolo di inclinazione dei pannelli solari dipende da diversi fattori tra cui
- Il posizionamento (li immaginiamo rivolti a Sud).
- La latitudine dell'impianto.
- La stagione nella quale si desidera la maggior produzione di energia.

Per stabilire la corretta inclinazione è necessaria un'ulteriore informazione: l'inclinazione dell'asse terrestre (rispetto alla perpendicolare al piano dell'eclittica). Tale angolo vale all'incirca $23.45°$. Per esempio alla latitudine di Trieste ($45.648611°$) l'angolo tra la perpendicolare alla superficie terrestre e i raggi del sole a mezzogiorno varia da $45.65 + 23.45 = 69.1$ gradi (solstizio di inverno) a $45.65 - 23.45 = 22.2$ gradi (solstizio d'estate). Per fare sì che il sole colpisca perpendicolarmente i pannelli occorre inclinare i pannelli di $69.1°$ d'inverno e di $22.2°$ d'estate. Se i pannelli non sono motorizzati è conveniente stabilire un angolo di inclinazione intermedio anche in base al periodo dell'anno in cui si desidera ottimizzare la produzione.

5. Si deve installare una serie di pannelli fotovoltaici con un lato di lunghezza 4 m, inclinato di 52 gradi rispetto alla linea orizzontale. Quale deve essere la larghezza della base del tetto corrispondente a tale lato?

6. Il tetto di una casa ha una sezione a forma di triangolo isoscele ed è largo 8 metri ed ha al centro un'elevazione di 2 metri. I pannelli fotovoltaici vengono posizionati direttamente sul tetto. Qual è la loro inclinazione?

7. Un ripetitore telefonico è situato in cima ad un monte, a quota 2040 m sul livello del mare. Una seconda antenna, alta 15 m, è posta alla base della montagna. Trovare l'angolo di puntamento (rispetto all'orizzontale) dell'antenna a valle.

A.4. Potenze, esponenziali, logaritmi e polinomi

Si può elevare un numero reale $a > 0$ ad un qualunque esponente reale b (vedi p. 17) ottenendo il numero a^b. Se assegniamo un preciso valore ad a e lasciamo b variabile,

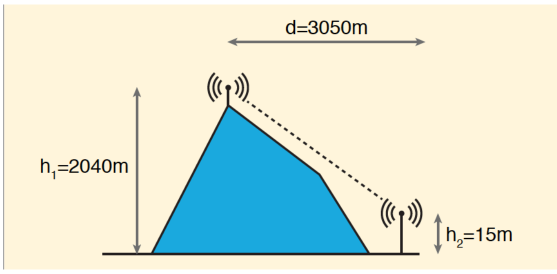


Figura A.3.9. Schematizzazione del problema di puntamento illustrato nell'esercizio 7.

otteniamo la funzione esponenziale di base a,

$$x \mapsto f(x) = a^x \quad a > 0,\, a \neq 1$$

Se invece immaginiamo di assegnare un preciso valore a b e di lasciare a variabile, otteniamo la funzione potenza di esponente b,

$$x \mapsto f(x) = x^b$$

Chiameremo più generalmente **funzioni esponenziali** o **potenza** le funzioni ottenute dalle precedenti moltiplicando per una costante (i.e. $k\,a^x$ e $k\,x^b$).

A.4.1. Funzioni potenza

b numero naturale. In tal caso la funzione $x \mapsto x^b$ ha come dominio tutto $\mathbb{R}$. Richiamiamo che

Funzioni pari e dispari

Definizione A.4.1. Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **pari** (risp. **dispari**) se per ogni x reale si ha $f(-x) = f(x)$ (risp. $f(-x) = -f(x)$).

Il grafico G_f di una funzione f pari è quindi simmetrico rispetto all'asse delle ordinate: un punto (x, y) è nel grafico di una funzione f pari se e solo se anche $(-x, y)$ lo è. Invece il grafico G_f di una funzione f dispari è simmetrico rispetto all'origine: un punto (x, y) è nel grafico di una funzione f dispari se e solo se anche $(-x, -y)$ lo è. È chiaro che le potenze $x \mapsto x^n$ sono funzioni pari se n è pari, mentre sono dispari se n è dispari (da cui il nome).

A.4.1.1. Potenze ad esponente reale positivo

Se consideriamo le funzioni potenza $x \mapsto x^b$ con esponente un arbitrario numero reale positivo b possiamo assumere che il dominio sia $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (se l'esponente ha la forma razionale ridotta ai minimi termini m/n, con n dispari il dominio può essere scelto come $\mathbb{R}$). Alcune proprietà di rilievo sono

- Il grafico delle funzioni $x \mapsto x^b$ $(b > 0)$ passa per i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.
- Se $a > b$ per $x > 1$ si ha $x^a > x^b$, mentre se $0 < x < 1$ si ha $x^a < x^b$.

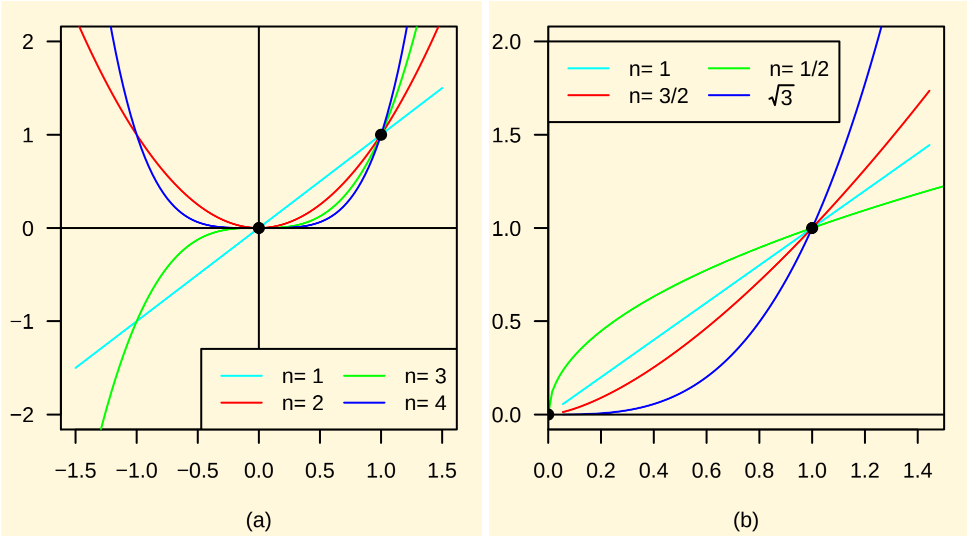


Figura A.4.1. Grafico delle funzioni potenza $y = x^n$. In (a) esponenti $n = 1, 2, 3$ e 4. In (b) esponenti reali positivi.

A.4.2. Funzioni esponenziali

Le funzioni esponenziali sono funzioni $x \to f(x) = a^x$ (a è la base della funzione esponenziale) per valori della base $a > 0$ e $a \neq 1$. Si può facilmente intuire il comportamento di tali funzioni per alcune scelte particolari delle basi. Per esempio, scegliendo basi 10, 2 ed 1/2 possiamo ricavare la tabella di valori A.4.1.

Tabella A.4.1. Tabelle di alcuni valori delle funzioni 10^x, 2^x e $(1/2)^x$

x	10^x
-3	0.001
-2	0.010
-1	0.100
0	1.000
1	10.000
2	100.000
3	1000.000

x	2^x
-3	0.125
-2	0.250
-1	0.500
0	1.000
1	2.000
2	4.000
3	8.000

x	$(1/2)^x$
-3	8.000
-2	4.000
-1	2.000
0	1.000
1	0.500
2	0.250
3	0.125

Riportando in un grafico i punti appena determinati otteniamo i punti mostrati nella Figura A.4.2 (a) dove abbiamo mostrato anche il grafico delle funzioni stesse. Un valore estremamente importante per la base di una funzione esponenziale è il numero di Nepero $e = 2.7182818\ldots$;[37] la funzione esponenziale di base e è la funzione esponenziale per eccellenza e viene tradizionalmente indicata con $x \mapsto e^x = \exp(x)$. Il suo grafico è riportato in Figura A.4.2 (b).

[37] Il suo ruolo appare diverse volte, in particolare vedi p. 145 del libro.

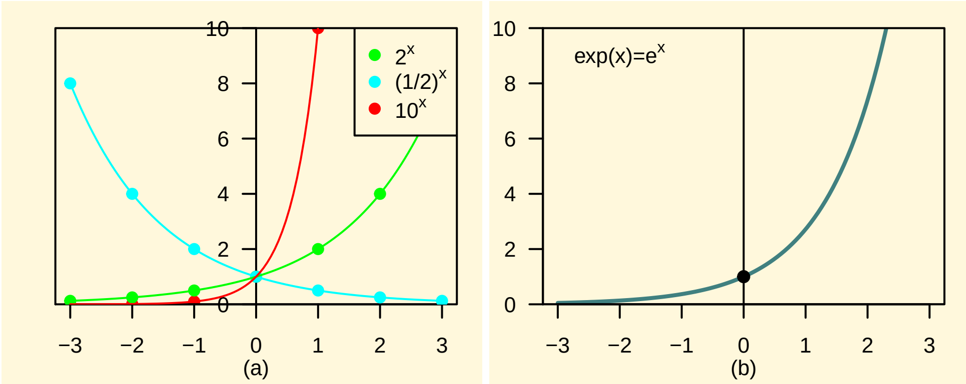


Figura A.4.2. (a) Diagrammi a punti e grafico delle funzione $(1/2)^x$, 2^x e 10^x. (b) Grafico della funzione esponenziale di base e, il numero di Nepero.

Si noti che tutte le funzioni esponenziali $y \mapsto a^x$ intersecano l'asse Y a quota 1; se $0 < a < 1$ la funzione è decrescente e per valori grandi il grafico si avvicina indefinitamente all'asse delle X, mentre se se $a > 1$ l'andamento è crescente e il grafico si avvicina indefinitamente all'asse delle X questa volta per valori grandi negativi della x. Si osservi inoltre che il grafico di $x \mapsto (1/a)^x$ si ottiene per riflessione rispetto all'asse delle Y dal grafico di $x \mapsto a^x$.

A.4.3. Logaritmi

Consideriamo la funzione esponenziale $x \mapsto a^x$ con x reale.

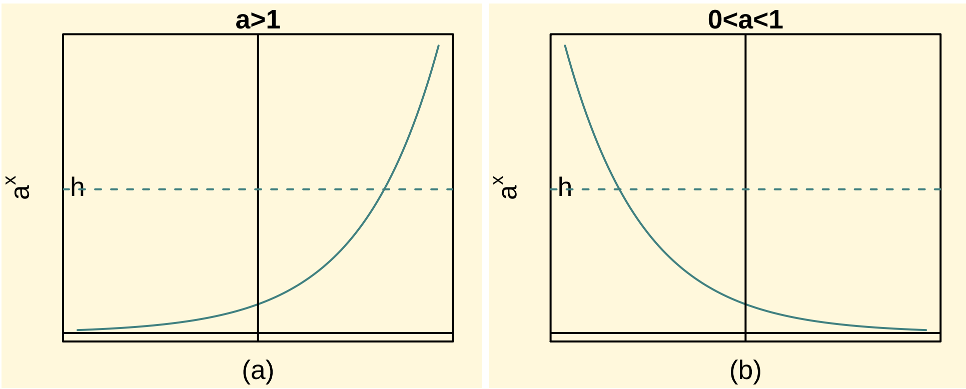


Figura A.4.3. Il grafico di una funzione esponenziale interseca la retta orizzontale a quota $h > 0$ in uno e un solo punto. In (a) la base è maggiore di 1, in (b) la base a è minore di 1.

Dal grafico della funzione esponenziale (vedi Figura A.4.3) risulta evidente che qualunque valore $y > 0$ si scelga l'equazione $a^x = y$ nell'incognita x ha una e una sola soluzione x. Tale soluzione viene chiamata **logaritmo** in base a di y e indicata come

$$x = \log_a(y)$$

a viene chiamata la base mentre y è l'argomento. Per certi valori di base ed argomento il calcolo è immediato.

In $y = \log_a(x)$ il logaritmo (y) è il numero al quale elevare la base (a) per ottenere l'argomento (x)

Esercizi e complementi

1. Si calcolino «al volo»

$\log_2(64)$	$\log_9(1/3)$	$\log_{1/9}(3)$
$\log_3(81)$	$\log_{1/3}(1/9)$	$\log_9(1/3)$

2. Si determinino due numeri interi consecutivi tra i quali cade $\log_2(49)$.

Per altri valori suggeriamo il ricorso ad R (o ad altro strumento di calcolo). In R il logaritmo in base a di b si scrive

```
log(b,base=a)
```

o semplicemente

```
log(b,a)
```

Il logaritmo in base 10 (common logarithm) si può scrivere direttamente come `log10` mentre il logaritmo naturale come `log`.

Dalla definizione del logaritmo seguono immediatamente le formule nella Tabella A.4.2

Tabella A.4.2. Proprietà fondamentali del logaritmo.

$$\log_a(x\,y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^k) = k\log_a(x)$$
$$\log_b(x) = \log_a(x)/\log_a(b) \quad \text{formula del cambiamento di base}$$

Nella figura A.4.4 sono riportati i grafici della funzione logaritmo in diverse basi. Si noti l'andamento crescente per base maggiore di 1 e decrescente altrimenti. Dal grafico possiamo ricostruire il valore della base semplicemente determinando l'ascissa del punto in cui il logaritmo ha ordinata 1: sappiamo infatti che $\log_a(a) = 1$.

Osserviamo che $\cos^2(x)$ è abbreviazione di $[\cos(x)]^2$, ma (attenzione!) $\cos^{-1}(x)$ non è abbreviazione di $[\cos(x)]^{-1} = \frac{1}{\cos(x)}$, ma è un altro nome possibile per la funzione arcocoseno che introdurremo in seguito. Idem per seno e tangente, ma anche per $\log^2(x) = (\log(x))^2$.

Esercizi

1. Semplificare l'espressione $\log(2/3) - \log(4/9) + 1/3\log(4^3) - \log(9)$
2. Risolvere le equazioni

$\log_x 49 = 2$	$\log_9 x = 1/3$
$\log_{2x+1} 81 = 4$	$\log_{27} 9 = x$
$\log_{x^2} 9 = 2$	$\log_8 2 = x$

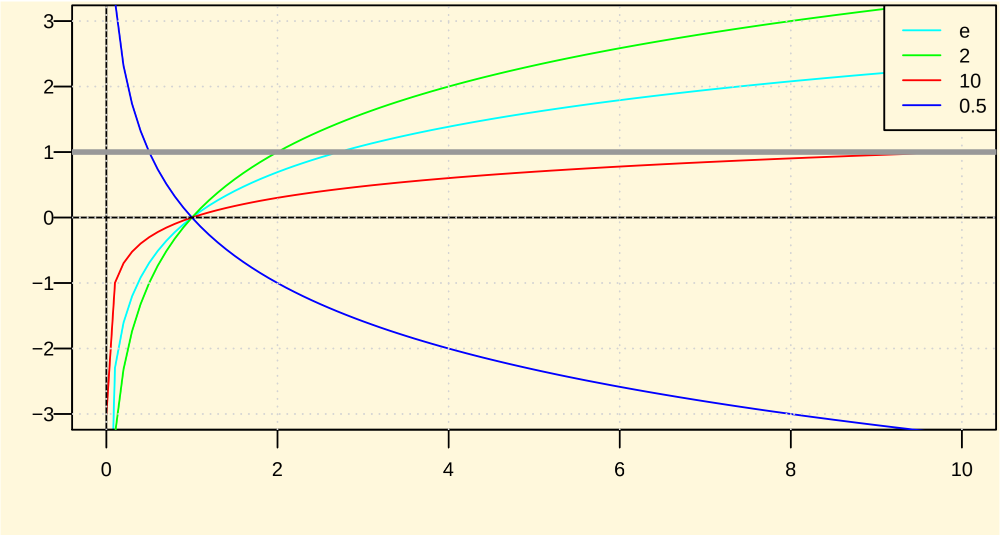


Figura A.4.4. Grafici della funzione logaritmo con base 2, 10, 1/2 ed il numero di Nepero e.

A.4.4. I polinomi

Un'espressione del tipo

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + \ldots a_nx^n \quad a_n \neq 0$$

è un polinomio di grado n. Se il grado è 1 abbiamo un'espressione lineare, se $n = 2$ un trinomio di secondo grado e così via. I coefficienti possono essere numeri reali arbitrari. È spesso di interesse la determinazione degli zeri di un polinomio.[38] Abbiamo fornito la soluzione completa nel caso $n = 1$ ed $n = 2$. Per valori di $n > 2$ il problema diviene generalmente complesso. Dividere il polinomio $P(x)$ per un monomio $M_r(x) = x - r$ significa trovare un polinomio $Q(x)$ (il quoziente) ed un numero R (il resto) tali che

Radici di un polinomio

$$P(x) = Q(x)\, M_r(x) + R.$$

Si noti che il grado di $Q(x)$ è uguale al grado di $P(x)$ meno 1. Il teorema del resto afferma che

$$R = P(r)$$

In particolare se r è una radice del polinomio allora $P(r) = 0$.

Ruffini. La regola di Ruffini è un algoritmo che consente agevolmente di dividere un polinomio per un monomio di primo grado e di determinare il resto della divisione.

[38] Si deve a Scipione del Ferro (1505) la formula risolutiva di un caso particolare dell'equazione di terzo grado, a Tartaglia il caso generale e a Ludovico Ferrari la risoluzione dell'equazione quartica (nel 1540). Entrambe sono riportate nell'Ars Magna di Cardano e rappresentano un superamento definitivo della Matematica Antica. Non esistono soluzioni generali per radicali di equazioni di grado superiore (Abel-Ruffini/Galois).

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	2	1	-8	-1	6
-1		-2	1	7	-6
	2	-1	-7	6	0

Si osservi che gli esponenti nell'ultima riga sono da ridurre di 1; il risultato della divisione è quindi

$$2x^3 - x^2 - 7x + 6$$

Se conoscessimo una radice r di un polinomio questo si può fattorizzare

$$P(x) = Q(x)M_r(x)$$

e il processo si presta ad essere iterato. La determinazione delle radici è un processo complesso ma in particolari situazioni ci si aiuta con il teorema delle radici razionali.[39]

A.4.2. Teorema. Ogni soluzione razionale di un'equazione polinomiale a coefficienti interi:

$$a_0 + a_1x^1 + \dots a_nx^n = 0$$

è della forma p/q, dove:

- p divide il termine noto a_0
- q divide il coefficiente a_n

Il teorema non dà alcuna informazione su eventuali altri radici. Per esempio, se abbiamo un'equazione della forma

$$5x^3 - 4\,x^2 - 40\,x + 32 = 0$$

allora le eventuali radici razionali sono contenute in questo insieme:

$$\{\pm 32/5, \pm 16/5, \pm 8/5, \pm 4/5, \pm 2/5, \pm 1/5, \pm 32, \pm 16, \pm 8, \pm 4, \pm 2, \pm 1\}.$$

Sostituendo nel polinomio i vari numeri scopriamo che effettivamente 4/5=0.8 è una radice. Applicando Ruffini

	x^3	x^2	x^1	x^0
	5	-4	-40	32
0.8		4	0	-32
	5	0	-40	0

vediamo che il polinomio si abbassa di grado e possiamo scrivere

$$5x^3 - 4\,x^2 - 40\,x + 32 = (x - 4/5)(5x^2 - 40)$$

Lasciamo al lettore il compito di determinare le eventuali altre radici.

[39] In R per la determinazione delle radici si può usare il comando `polyroot`.

Indice analitico