

last update: 27 Nov. 2020

Denotiamo con  $Y = (Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_p)$  il vettore  $p$ -variato delle  $p$  variabili osservate, con  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$  il vettore  $p$ -variato delle  $p$  componenti di errore associate a  $Y$  e con  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k, \dots, \eta_q)$  il vettore  $q$ -variato delle  $q$  variabili latenti. Il modello lineare della CFA è il seguente:

$$Y = \tau + \Lambda \eta + \delta$$

dove  $\tau \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  denota il vettore (non aleatorio) contenente le intercette del modello mentre  $\Lambda \in \mathbb{R}^{p \times q}$  è la matrice (non aleatoria) contenente i coefficienti del modello lineare. Per semplicità, si pone solitamente  $\tau = \mathbf{0}_p$ . Ricordando che  $\eta \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Phi)$  e  $\delta \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Theta_\delta)$ , la matrice di varianze-covarianze riprodotta dal modello è la seguente:

$$\Sigma_{y_{p \times p}} = \Lambda_{p \times q} \Phi_{q \times q} (\Lambda_{p \times q})^T + \Theta_{\delta_{p \times p}}$$

Dopo aver stimato i parametri del modello (ad esempio, mediante massima verosimiglianza o minimi quadrati pesati), questi possono essere standardizzati in due modi:

- usando le varianze stimate delle variabili latenti  $\hat{\phi} = \text{diag}(\hat{\Phi})$
- usando sia le varianze stimate delle variabili latenti  $\hat{\phi} = \text{diag}(\hat{\Phi})$  sia quelle delle variabili osservate  $\hat{\sigma}_y = \text{diag}(\hat{\Sigma}_y)$

Il primo caso corrisponde a quanto si ottiene usando l'opzione `std.lv` nella libreria `lavaan` mentre il secondo caso è quello corrispondente alla standardizzazione completa `std.all`.

La standardizzazione completa dei parametri si ottiene come segue:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_k^* &= \left( \hat{\lambda}_k \sqrt{\hat{\phi}_k} \right) / \hat{\sigma}_y & k = 1, \dots, q \\ \hat{\theta}_\delta^* &= \hat{\theta}_\delta / \hat{\sigma}_y \\ \hat{\phi}_{lh}^* &= \hat{\phi}_{lh} / (\hat{\phi}_{ll} \cdot \hat{\phi}_{hh}) & h = 1, \dots, q; l = 1, \dots, q; h \neq l \end{aligned}$$

dove  $\hat{\theta}_\delta = \text{diag}(\hat{\Theta}_\delta)$ ,  $\hat{\phi}_{lh}$  indica il generico elemento (fuori dalla diagonale) della matrice  $\hat{\Phi}$  mentre  $/$  indica la divisione elemento per elemento (element-wise division). Usando la libreria `lavaan`, la standardizzazione completa può essere effettuata mediante le funzioni:

```
summary(..., standardized='std.all')
standardizedSolutions(..., type='std.all')
```