last update: 17 Nov. 2020

Denotiamo con $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$ il vettore p-variato delle p variabili osservate, con $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ il vettore p-variato delle p componenti di errore associate a Y e con $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_q)$ il vettore q-variato delle q variabili latenti. Il modello lineare della CFA è il seguente:

$$Y = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Lambda}\eta + \delta$$

dove $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ denota il vettore (non aleatorio) contenente le intercette del modello mentre $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ è la matrice (non aleatoria) contenente i coefficienti del modello lineare. Per semplicità, si pone solitamente $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}_p$. Ricordando che $\eta \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi})$ e $\delta \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Theta}_\delta)$, possiamo scrivere quanto segue.

Calcolo della quantità $\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y\right]$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y\right] = \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{\Lambda}\eta + \delta)(\boldsymbol{\Lambda}\eta + \delta)^T\right] \quad \text{definizione di covarianza}$$

...svolgendo il prodotto:

$$= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\Lambda}\eta\eta^T\boldsymbol{\Lambda}^T + \delta\eta^T\boldsymbol{\Lambda}^T + \boldsymbol{\Lambda}\eta\delta^T + \delta\delta^T\right]$$

...per la linearità del valore atteso $\mathbb{E}\left[.\right]$:

$$= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\Lambda}\eta\eta^T\boldsymbol{\Lambda}^T\right] + \mathbb{E}\left[\delta\eta^T\boldsymbol{\Lambda}^T\right] + \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\Lambda}\eta\delta^T\right] + \mathbb{E}\left[\delta\delta^T\right]$$

...riprendendo gli assunti della CFA della slide 32:

$$= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\Lambda}\eta\eta^T\boldsymbol{\Lambda}^T\right] + \cancelto{0}{\mathbb{E}\left[\delta\eta^T\boldsymbol{\Lambda}^T\right]} + \cancelto{0}{\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\Lambda}\eta\delta^T\right]} + \mathbb{E}\left[\delta\delta^T\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\Lambda}\eta\eta^T\boldsymbol{\Lambda}^T\right] + \mathbb{E}\left[\delta\delta^T\right]$$

...poiché $\boldsymbol{\Lambda}$ è una costante e le sole componenti aleatorie sono η e δ, portiamo fuori dal valore atteso la costante:

$$= \boldsymbol{\Lambda}\mathbb{E}\left[\eta\eta^T\right]\boldsymbol{\Lambda}^T + \mathbb{E}\left[\delta\delta^T\right]$$

...notiamo che $\mathbb{E}\left[\eta\eta^T\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[\eta\right] := \boldsymbol{\phi}$:

$$= \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^T + \mathbb{E}\left[\delta\delta^T\right]$$

...notiamo ancora che $\mathbb{E}\left[\delta\delta^T\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[\delta\right] := \boldsymbol{\Theta}_\delta$:

$$= \boxed{\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^T + \boldsymbol{\Theta}_\delta}$$

Calcolo della quantità $\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[Y\right]$

In generale, notiamo che $\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[Y\right] = \mathrm{diag}(\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y\right])$. Dunque:

$$= \mathrm{diag}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^T + \mathbf{\Theta}_\delta)$$
$$= \mathrm{diag}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^T) + \mathrm{diag}(\mathbf{\Theta}_\delta)$$

...applicando l'operatore diag(.) prendiamo gli elementi $j = 1, \ldots, p$ della diagonale della matrice risultante:

$$= (\lambda\phi\lambda)_{jj} + \theta_{\delta_{jj}}$$
$$= \boxed{(\lambda^2\phi)_{jj} + \theta_{\delta_{jj}}} \quad \text{con } j = 1, \ldots, p$$

Dal risultato ottenuto, infine, possiamo scrivere quanto segue per la j-esima variabile osservata:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[Y_j\right] = \mathrm{diag}(\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y\right])_j = (\lambda^2\phi)_{jj} + \theta_{\delta_{jj}}$$