Indice

C Vettori e matrici

C.1. Introduzione

Immaginiamo di lavorare in una stazione meteorologica e di dovere determinare i valori di temperatura, umidità, precipitazioni, pressione atmosferica ecc. Una volta fissate le scale di misura, le nostre osservazioni si tradurranno in numeri, che possiamo codificare in liste di dati numerici. Per esempio, potremo scrivere $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ dove x_1 è il valore della temperatura, x_2 quello dell'umidità, e così via.

È utile sviluppare un formalismo che consenta di trattare matematicamente liste di dati di questo tipo. Chiameremo **vettore** ad n componenti (o di **dimensione** n) una lista $\boldsymbol{x}$ di n numeri[1]

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e diremo che il numero x_k è la k-esima **componente** del vettore $\boldsymbol{x}$. Quando lavoriamo con vettori a due o tre componenti è possibile visualizzare i vettori come segmenti orientati nel piano o nello spazio; purtroppo la nostra capacità di visualizzare si limita alle 3 dimensioni e per vettori a $4, 5, \ldots$ componenti non restano che i numeri.

C.1.1. Operazioni con i vettori

Nella tabella C.1.1 sono riportate alcune operazioni che è possibile definire sui vettori

Tabella C.1.1. Somma, moltiplicazione per uno scalare c, prodotto interno e norma di vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in n dimensioni.

addizione	$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
prodotto per uno scalare c	$c\,\boldsymbol{x} = (c\,x_1, c\,x_2, \ldots, c\,x_n)$
prodotto interno	$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$
norma	$\lVert\boldsymbol{x}\rVert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Queste operazioni in dimensione 2 o 3 hanno un chiaro significato geometrico, ma non è detto che perdano di concretezza in dimensioni superiori:

[1] Scriveremo qui in grassetto i vettori per distinguerli dai numeri.

Esempio C.1.1. Il vettore ingredienti $\boldsymbol{I} = (350, 15, 50, 50, 150)$ descrive i grammi di riso, funghi secchi, burro, parmigiano e cipolla richiesti per la preparazione di un buon risotto ai funghi (fuori stagione) per quattro persone. Il vettore costo $\boldsymbol{C} = (3, 150, 12, 15, 1)$ descrive il costo in Euro di un chilo di ciascun ingrediente. Mostrare che il costo del risotto è[2]

$$\frac{1}{1000}\,\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{C} = 4.80\,€$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Le seguenti proprietà del prodotto interno

- $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$
- $\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}$
- $(c\,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = c\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$
- $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 > 0$ se $\boldsymbol{x}\neq 0$

si possono dedurre immediatamente dalla definizione. Usando queste proprietà, se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono 2 vettori non nulli, abbiamo

$$0 \le \|t\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = (t\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot(t\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = t^2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2t\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

per ogni t reale. L'espressione a destra è un polinomio di secondo grado nella variabile t che non è mai negativo. Quindi il relativo discriminante deve essere ≤ 0. Imponendo tale condizione ricaviamo

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2 \le 0$$

o anche

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \le \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \tag{C.1.1}$$

che è la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.[3] Notiamo ancora che il segno di uguale vale solo se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ risultano paralleli, ossia se esiste un numero t tale che $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$. Infatti solo in tal caso si ha $\|t\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = 0$. La diseguaglianza implica che

$$-1 \le \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \le 1$$

questo consente di definire astrattamente l'angolo θ tra 2 vettori come

$$\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}$$

Esercizi e complementi

1. In R per scrivere un vettore usiamo il comando `c`, per esempio

```
> x=c(3,5,6,1)
```

genera un vettore a quattro componenti e lo associa all'oggetto `x`. Se consideriamo un altro vettore a 4 componenti

```
> y = c(1,3,2,1)
```

possiamo calcolare

[2] Nella prima edizione era 2.70€

[3] La disuguaglianza porta il nome di AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857) e KARL HERMAN AMANDUS SCHWARZ (1843-1921). In realtà si deve a VIKTOR BUNYAKOVSKY (1804-1889) che la pubblicò 25 anni prima di Schwarz.

```
> x+y
## [1] 4 8 8 2
```

e per esempio

```
> 3*x # moltiplicazione per uno scalare
## [1]  9 15 18  3
```

Dato un vettore $\boldsymbol{x}$ possiamo estrarne una (o più) componenti usando le parentesi quadre

```
> x[3] # visualizza la terza componente
## [1] 6
```

e anche modificarle

```
> x[3] = 6 # riassegna  la terza componente
> x
## [1] 3 5 6 1
```

Il prodotto interno si può scrivere

```
> sum(x*y)# o anche x%*%y
## [1] 31
```

2. Si inseriscano in R i vettori $\boldsymbol{x} = (3, 5, 7, 4)$ e $\boldsymbol{y} = (4, 0, 7, 5)$.
   1. Si determinino, manualmente e con R i vettori $7\,\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}-2\,\boldsymbol{y}$.
   2. Si determini $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$.

3. Si generi con la R un vettore di dimensione 50 le cui componenti siano date da $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$. Suggerimento: il vettore $x = (1, 2, 3, ..., 50)$ si scrive con la notazione sintetica

```
> x = 1:50
```

4. Si generi in R un vettore di dimensione 20 le cui componenti siano numeri casuali uniformemente distribuiti nell'intervallo $(0, 1)$.

C.2. ✂ I numeri complessi

> «En analyse, on appelle *expression symbolique* ou *symbole* toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomine de même *équations symboliques* toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et altérant selon des règles fixes ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment.»
>
> AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, 1821

Consideriamo un'equazione di secondo grado. Per esempio

$$2x^2 - 2x + 5 = 0 \tag{C.2.1}$$

Usando (senza riflettere troppo) la formula risolutiva

$$x_{\pm} = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-10}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{-9}\right) \tag{C.2.2}$$

ci imbattiamo nella radice quadrata di numeri negativi; l'equazione non ha soluzioni reali! Se volessimo risolvere l'equazione di primo grado $x + 3 = 2$ avendo a disposizione solo i numeri positivi incontreremmo lo stesso genere di difficoltà: per fare in modo che $x+3 = 2$ abbia una soluzione saremmo portati a considerare anche i numeri negativi.[4] Tornando all'equazione di secondo grado, il numero negativo -9 non ha radice quadrata reale. Se vogliamo a tutti i costi che l'equazione (C.2.1) abbia soluzioni, possiamo procedere a livello simbolico, semplicemente definendo come soluzioni i simboli dati dalla (C.2.2), in cui compaiono anche radici di numeri reali negativi. Questo naturalmente introdurrebbe in matematica un'infinità di nuovi simboli, quali $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-\pi}$, ... Tuttavia, si scopre alla fine che basta introdurre un solo nuovo simbolo particolare per $\sqrt{-1}$ ponendo

$$i = \sqrt{-1} \tag{C.2.3}$$

ed assumere che le solite proprietà di somma e prodotto valgano anche in relazione ad i e ai vecchi numeri reali. Per esempio $\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)\,9} = \sqrt{-1}\sqrt{9} = i3 = 3i$, $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$, $\sqrt{-\pi} = i\sqrt{\pi}$. Inoltre, elevando (C.2.3) al quadrato si ha pure che

$$i^2 = -1$$

La soluzione simbolica della equazione (C.2.1) diviene allora

$$\tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{-9}\right) = \tfrac{1}{2}(1 \pm 3i)$$

In questa maniera possiamo sempre trovare radici di qualunque equazione di secondo grado. Tali radici sono espressioni del tipo

$$z = x + iy \tag{C.2.4}$$

con x e y numeri reali; chiameremo espressioni come la (C.2.4) **numeri complessi**. Il numero reale x è detto **parte reale** di z mentre il numero reale y è la **parte immaginaria** di z. Diciamo inoltre numero **immaginario puro** un numero complesso in cui la parte reale sia nulla. Riassumendo: l'equazione (C.2.1) possiede le soluzioni complesse

$$z_{\pm} = \tfrac{1}{2}\,(1 \pm 3i)$$

Vedremo ora alcuni usi del simbolo i introdotto. Abbiamo già detto che estendiamo tacitamente le proprietà comuni di addizione e moltiplicazione al simbolo i. Possiamo allora considerare le varie operazioni algebriche.

Addizione e moltiplicazione di numeri complessi. Possiamo sommare e moltiplicare tra di loro numeri complessi. Avendo esteso le proprietà di somma e prodotto ai numeri complessi possiamo scrivere $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$, mentre $(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd = ac - bd + ibc + iad$, avendo usato $i^2 = -1$. Riassumendo:

[4] Per gli antichi Cinesi i numeri negativi non costituivano un problema insormontabile. Essi erano abituati a far di conto con l'uso di bastoncini. I bastoncini rossi erano riservati ai numeri positivi ed i neri ai numeri negativi.

Definizione C.2.1. La **somma** di $z = a + ib$ e $w = c + id$ è il numero complesso $z + w = (a + c) + i(b + d)$. Il **prodotto** di z e w è il numero complesso $zw = (ac - bd) + i(bc + ad)$.

Definiamo ora alcune semplici operazioni sui numeri complessi

Definizione C.2.2. Diciamo **modulo** del numero complesso $z = x + iy$ il numero reale positivo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definizione C.2.3. Il numero complesso $\bar{z} = x - iy$ è detto **complesso coniugato** del numero complesso $z = x + iy$.

Notiamo che si ha

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Divisione di numeri complessi. Si può introdurre la **divisione** di numeri complessi esattamente come per i numeri reali. Se $w \neq 0$, diciamo che $z/w = q$ se $qw = z$. Usando la coniugazione dei numeri complessi risulta facile determinare parte reale e parte immaginaria del quoziente di due numeri complessi. Si consideri per esempio

$$z = \frac{7 - i}{5 + i}$$

Se moltiplichiamo numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore troviamo

$$z = \frac{(7 - i)}{(5 + i)} \frac{(5 - i)}{(5 - i)} = \frac{34 - 12i}{26} = \frac{17}{13} - i\frac{6}{13}$$

Rappresentazione nel piano dei numeri complessi. Un numero complesso $z = x + iy$ può essere caratterizzato dalla coppia di numeri reali (x, y) e come tale può essere rappresentato in un piano cartesiano dal punto $P = P(x, y)$.

Equazioni di secondo grado. Abbiamo visto all'inizio della sezione come risolvere le equazioni di secondo grado a coefficienti reali. Per esempio se $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ abbiamo le soluzioni $z_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \pm i\right)$. Si noti che le radici risultano coniugate tra di loro. Consideriamo ora l'equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{C.2.5}$$

con $a \neq 0$, dove i coefficienti a, b e c sono numeri complessi. Cerchiamo le soluzioni, eventualmente complesse, di tale equazione. Procedendo come in si trova

$$z = \frac{-b \pm \omega}{2a}$$

dove $\pm\omega$ sono le due soluzioni dell'equazione $\omega^2 = \Delta = b^2 - 4ac$. La formula risolutiva trovata coincide formalmente con quella che già conoscevamo.

Laboratorio C.2.4. I numeri complessi si scrivono in R usando il simbolo `i`. Per esempio

```
> (z =3+7i)

## [1] 3+7i
```

Possiamo ricavare i coefficienti della parte reale ed immaginaria di z ed il modulo

```
> Re(z)#parte reale

## [1] 3

> Im(z)#parte immaginaria

## [1] 7

> Mod(z)#modulo

## [1] 7.615773
```

Esercizi e complementi

1. Si determinino i seguenti prodotti:

1. $(2+3i)(1-i)$ *3.* $(1-i)(1+i)$

2. $(7+\pi i)(\pi - i)$ *4.* $(1+i\sqrt{3})^3$

2. Si determinino i seguenti quozienti:

1. $\dfrac{2+3i}{1-i}$ *2.* $\dfrac{\pi+i}{\pi-i}$ *3.* $\dfrac{1-i}{4+i}$ *4.* $\dfrac{1}{2+i}$ *5.* $\dfrac{1+2i}{2+i}$

3. Si determinino i moduli e i coniugati dei risultati degli esercizi precedenti.

4. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni nell'incognita z:

1. $2z^2 + (3+i)z + 2i - 1/4 = 0$ *2.* $z^2 + 2iz + (3+4i) = 0$

5. Consideriamo un polinomio di ordine n

$$P(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n \quad \text{con } a_n \neq 0$$

Il comando `polyroot(c(`$a_0, a_1, \ldots, a_n$`))` ne restituisce le radici. Per esempio

```
> polyroot(c(1+2i,3+2i,0,5i,7))
## [1]  0.3665975+0.6906312i
## [2] -0.5599357+0.0012340i
## [3] -0.4108548-0.5882420i
## [4]  0.6041929-0.8179089i
```

restituisce le radici del polinomio

$$P(x) = (1+2i) + (3+2i)x + 5ix^3 + 7x^4$$

Se consideriamo un polinomio con coefficienti reali, per esempio

$$P(x) = 4x^3 + 6x + 2$$

```
> polyroot(c(2,6,0,4))
## [1] -0.3129084+0.000000i
## [2]  0.1564542+1.254366i
## [3]  0.1564542-1.254366i
```

Vediamo che ha esattamente 3 radici. La prima è reale, mentre le altre 2 sono complesse e coniugate tra loro. Questo fatto vale in generale. Ogni polinomio $p_n(x)$ di grado n a coefficienti reali si può fattorizzare

$$p_n(x) = a(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

dove le radici complesse sono a coppie coniugate fra di loro.

C.3. Matrici

Esempio C.3.1. [Esempio preparatorio] A 3 pazienti vengono quotidianamente somministrati 4 diversi tipi di farmaci. Possiamo collezionare i dosaggi in una tabella come la seguente

farmaco #	1	2	3	4
paziente 1	100	50	25	10
paziente 2	50	25	100	0
paziente 3	0	50	100	25

o anche sotto forma di **matrice** 3×4

$$C = \begin{bmatrix} 100 & 50 & 25 & 10 \\ 50 & 25 & 100 & 0 \\ 0 & 50 & 100 & 25 \end{bmatrix}$$

Chiameremo matrice di tipo $m \times n$ una tabella rettangolare di dati numerici con m righe ed n colonne.[5] Scriveremo una matrice A di tipo $m \times n$ come

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Il numero a_{ij} che si trova all'intersezione della i-esima riga e j-esima colonna, viene chiamato componente o entrata di posto ij della matrice A. Scriveremo anche $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

Sia ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

una matrice di tipo 3×2. La componente di posto 31 di A è $a_{31} = 5$. Consideriamo ora due casi particolari. Se la matrice A è di tipo $1 \times n$, essa consta di n numeri affiancati

[5] Attenzione a non eseguire il prodotto: una matrice a 3 righe e 2 colonne è di tipo 3×2 e non di tipo 6; è quindi di tipo diverso da una matrice 2×3 ossia con 2 righe e 3 colonne. Una notazione migliore sarebbe stata $m \& n$, ma è tardi per modificare consuetudini radicate. Il prodotto mn ha comunque significato: è infatti il numero di entrate della matrice.

sulla sua unica riga:

$$A = [a_1, \ldots, a_n]$$

Possiamo allora identificare tale matrice con un vettore ad n-componenti; per ricordarci che le componenti del vettore sono scritte in una sola riga diremo vettori riga tali matrici; se consideriamo invece una matrice di tipo $m \times 1$, ossia costituita da una sola colonna

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix}$$

allora possiamo ancora identificarla con un vettore ad m-componenti, disposte ora in colonna. Diremo vettore colonna una matrice così fatta.[6]

C.3.1. Moltiplicazione per un numero e addizione di matrici

Generalizzeremo ora le operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare che abbiamo definito in precedenza per i vettori.

Moltiplicazione per un numero. Torniamo all'Esempio preparatorio C.3.1. Dimezziamo la dose dei farmaci di ciascun paziente. La matrice delle nuove dosi si ottiene rimpiazzando la matrice C con la matrice

$$C' = \frac{1}{2} C = \begin{bmatrix} 50 & 25 & 12.5 & 5 \\ 25 & 12.5 & 50 & 0 \\ 0 & 25 & 50 & 12.5 \end{bmatrix}$$

Abbiamo qui usato il prodotto $c\,A$ di un numero c e di una matrice A di tipo $m \times n$ definito come

$$c\,A = \begin{bmatrix} c\,a_{11} & \ldots & c\,a_{1n} \\ c\,a_{21} & \ldots & c\,a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c\,a_{m1} & \ldots & c\,a_{mn} \end{bmatrix}$$

Addizione di matrici. Consideriamo ancora l'Esempio C.3.1. Questa volta somministriamo i farmaci due volte al giorno e rappresentiamo nelle matrici C_1 e C_2 la prima dose e la seconda dose rispettivamente. La dose totale $C = C_1 + C_2$ si ottiene facilmente sommando gli ingressi corrispondenti delle matrici C_1 e C_2. Anche in questo caso conviene definire l'operazione di somma in generale. Date due matrici A e B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

[6] Si noti che abbiamo soppresso l'indice di riga nel caso di un vettore riga e di colonna nel caso di un vettore colonna.

dello stesso tipo, poniamo

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Trasposizione. Se A è una matrice di tipo $m \times n$ diciamo **matrice trasposta** di A, e la indichiamo con il simbolo A^T, la matrice ottenuta da A scambiando righe e colonne. La matrice A^T risulta allora di tipo $n \times m$.[7] Sono utili le seguenti formule di cui omettiamo la dimostrazione:

$$(A^T)^T = A \tag{C.3.1}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{C.3.2}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{C.3.3}$$

Esercizi e complementi

1. Siano dati i numeri a e b e le matrici A e B dello stesso tipo. Verificare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} &A + B = B + A \\ &(A + B) + C = A + (B + C) \\ &c(A + B) = cA + cB \\ &(ab)A = a(bA) \\ &a(A + B) = aA + aB \\ &(a + b)A = aA + bA \end{aligned}$$

2. In R le matrici si scrivono con il comando `matrix` specificando il numero di righe e di colonne e gli ingressi.

```
> matrix(1:12,ncol=3)
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    5    9
## [2,]    2    6   10
## [3,]    3    7   11
## [4,]    4    8   12
```

possiamo riempire la matrice anche per righe

```
> matrix(1:12,ncol=3,byrow=TRUE)
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    4    5    6
## [3,]    7    8    9
## [4,]   10   11   12
```

mentre se specifichiamo righe e colonne

```
> matrix(1:12,ncol=6,nrow=4)
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
## [1,]    1    5    9    1    5    9
## [2,]    2    6   10    2    6   10
## [3,]    3    7   11    3    7   11
## [4,]    4    8   12    4    8   12
```

[7] In R la matrice trasposta di A si calcola con t(A).

il riempimento fa ricorso alla *recycling rule*.

3. Possiamo rappresentare una matrice $m \times n$ in R accostando n liste colonna di dimensione m.[8] Usando tale rappresentazione scrivere la matrice C dell'Esempio C.3.1 e calcolare $2C$.

C.4. Sistemi lineari 2×2

Dati due numeri a e b possiamo considerare la semplice equazione

$$ax = b \tag{C.4.1}$$

con incognita x. Se $a \neq 0$ possiamo dividere per a ambo i membri dell'equazione ed otteniamo la soluzione (unica!)

$$x = a^{-1}b \tag{C.4.2}$$

Se invece $a = 0$ distinguiamo i due casi $b = 0$ e $b \neq 0$. Nel primo caso qualunque valore di x risolve l'equazione, nel secondo caso l'equazione non ha soluzioni.

Per generalizzare l'equazione precedente consideriamo **sistemi di equazioni lineari** (o semplicemente sistemi lineari) di più equazioni in più incognite. Consideriamo per esempio il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \tag{C.4.3}$$

Risolvere il sistema significa trovare i valori di x e y che verifichino simultaneamente le due equazioni. Abbiamo parecchi modi di ricercare le soluzioni del sistema. Per esempio, supponendo che (x, y) sia una soluzione:

- Ricaviamo $y = 4 - 2x$ dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda

  $$x + 8 - 4x = 5 \Rightarrow -3x + 8 = 5 \Rightarrow 3 = 3x \Rightarrow x = 1$$

  Si ricava poi facilmente $y = 2$.
- Moltiplichiamo la seconda equazione per 2 ottenendo $2x + 4y = 10$. Sottraiamo poi il risultato dalla prima equazione ottenendo

  $$y - 4y = 4 - 10 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

  ed usando ancora la prima equazione $x = 1$. Si vede direttamente che $(1, 2)$ è soluzione.
- Notiamo che le due equazioni descrivono due rette nel piano. Risolvere il sistema lineare equivale dunque a trovare l'intersezione delle due rette. Le rette in esame hanno pendenze -2 e $-1/2$ e quindi non sono parallele; pertanto il sistema ha un'unica soluzione, determinabile graficamente come nella Figura C.4.1.
- Possiamo infine riscrivere e risolvere il sistema usando la notazione matriciale. A questo approccio dedicheremo la prossima sezione.

[8] In R `cbind`. Oppure accostiamo m liste riga di dimensione n; in R `rbind`.

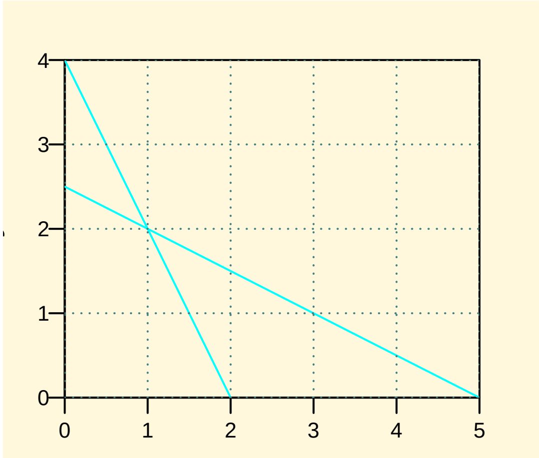

Figura C.4.1. Risoluzione grafica del sistema (C.4.3). La soluzione $(x, y) = (1, 2)$ del sistema coincide con le coordinate del punto di intersezione delle due rette.

C.4.1. Sistemi lineari e prodotto matrice-vettore

Consideriamo il semplice sistema lineare nelle incognite x_1 ed x_2

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 12 \\ 6x_1 + 5x_2 = 19 \end{cases}$$

Raccogliamo in una matrice A i coefficienti delle incognite

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

e presentiamo come vettori colonna sia i termini noti che le incognite

$$B = \begin{bmatrix} 12 \\ 19 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora riscrivere il sistema di partenza come

$$AX = B \tag{C.4.4}$$

a patto di definire in modo opportuno il prodotto $A\,X$ della matrice A per il vettore X. Mettiamo in evidenza le righe $A_1 = (3, 7)$ ed $A_2 = (6, 5)$ della matrice A, scrivendo

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Il prodotto di A per X deve dar luogo ad un vettore colonna a due componenti (vedi (C.4.4)). La prima componente deve essere $3x_1 + 7x_2$ e la seconda $6x_1 + 5x_2$; notiamo ora che $3x_1 + 7x_2$ non è altro che il prodotto interno $A_1 \cdot X$, mentre $6x_1 + 5x_2 = A_2 \cdot X$. Nel caso di un sistema lineare di m equazioni ed n incognite

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

si può procedere esattamente come prima. Si introducono la matrice A dei coefficienti ed i vettori colonna del termine noto[9] B e delle incognite X

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dopo aver evidenziato le righe della matrice A, scrivendola come una singola matrice colonna di m righe

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix} \quad \text{si può definire} \quad AX = \begin{bmatrix} A_1 \cdot X \\ A_2 \cdot X \\ \dots\dots \\ A_m \cdot X \end{bmatrix} \tag{C.4.5}$$

Il sistema può ora essere trascritto nella forma matriciale

$$AX = B \tag{C.4.6}$$

La riscrittura del sistema di partenza in forma matriciale ci ha quindi condotto in maniera naturale a definire il prodotto di una matrice $m \times n$ per un vettore colonna a n componenti. Il risultato è un vettore colonna ad m componenti.

Esempio C.4.1. Siano date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Il prodotto è

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*8+4*2+6*7 \\ 1*8+2*2+4*7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Esercizi e complementi

1. Si considerino i sistemi lineari $\begin{cases} 2x+7y+6z+8w=2 \\ -x+2y+3z+2w=4 \\ x-6z+5w=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5w-6z+x=1 \\ 2x+6z+7y+8w=2 \\ 2w-x+2y+3z=4 \end{cases}$
   Si scrivano tali sistemi usando la notazione matriciale.
2. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

   Si scriva esplicitamente il sistema lineare $AX = B$. Si determini inoltre il prodotto AB.

---

[9] Se il termine noto è il vettore nullo allora il sistema è detto omogeneo. Un sistema lineare omogeneo possiede sempre la soluzione $X = \mathbf{0}$.

C.4.2. Risoluzione di sistemi lineari

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1+8x_2+6x_3= 20 \\ 4x_1+2x_2-2x_3=-2 \\ 3x_1-\ x_2+\ x_3= 11 \end{cases} \tag{C.4.7}$$

Possiamo semplificarne le equazioni seguendo i seguenti criteri:

- **Moltiplicazione per uno scalare.** Possiamo moltiplicare entrambi i lati di un'equazione del sistema per un numero diverso da 0 ottenendo un'equazione equivalente. Ad esempio moltiplicando per 1/2 l'equazione

$$2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 20$$

  otteniamo

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$

- **Somma o sottrazione.** Possiamo rimpiazzare un'equazione con quella ottenuta aggiungendole (o sottraendole) un'altra (o, in virtù della proprietà precedente, un suo multiplo). Ad esempio

$$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2$$

  può venire rimpiazzata (sottraendole 4 volte $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$) da

$$-14x_2 - 14x_3 = -42$$

- **Scambio di due equazioni.** L'ordine in cui scriviamo le equazioni è irrilevante.

Combinando queste operazioni in modo ordinato (per esempio con il metodo di Gauss-Jordan) è possibile risolvere il sistema o dimostrare che non ha soluzioni.

Esempio C.4.2. Si consideri la seguente tabella che illustra il contenuto nutritivo di un grammo di alcuni alimenti pronti

		pollo arrosto	spaghetti	uova sode	pane
calorie	(kcal)	2.15	1.41	1.33	2.7
proteine	(g)	0.269	0.05	0.1	0.1
carboidrati	(g)	0	0.285	0.01	0.5
grassi	(g)	0.115	0.007	0.08	0.05

Un dietologo deve preparare usando pollo, spaghetti, uova sode e pane la dieta di un cliente che abbisogna di 2350 kcal.[10] Suggerisce un consumo quotidiano di 60 g di proteine, 365 g di carboidrati e 85 g di grassi. Che dieta prescriverà? Per determinare la dieta da seguire conviene introdurre

$$A = \begin{bmatrix} 2.15 & 1.41 & 1.33 & 2.7 \\ 0.269 & 0.05 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.285 & 0.01 & 0.5 \\ 0.115 & 0.007 & 0.08 & 0.05 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2350 \\ 60 \\ 365 \\ 85 \end{bmatrix}$$

[10] In dietetica si usa tradizionalmente come unità di misura la Caloria con la «C» maiuscola, o kilocaloria (kcal). La Caloria non è una unità del Sistema Internazionale, tanto che la U.E. richiede, nelle etichette dei prodotti alimentari, l'indicazione del contenuto energetico in kiloJoule (kJ): si ha 1 kcal = 4.1866 kJ $\approx$ 4 kJ.

Il sistema da risolvere è $AX = B$ dove X è un vettore colonna a quattro componenti date da x_1, x_2, x_3 ed x_4 che rappresentano le dosi necessarie (in grammi) dei quattro piatti nell'ordine indicato. Il sistema ha effettivamente un'unica soluzione data (con ragionevole approssimazione) da $x_1 = -367$ g, $x_2 = -1360$ g, $x_3 = 778$ g ed $x_4 = 1489$ g. [11] Ma tale soluzione viene scartata dal dietologo (perché gli pare eccessivo un consumo di circa 1.5 kg di pane) e dal paziente (perché spaventato dal segno meno davanti al consumo di spaghetti). Alla fine il dietologo propone una dieta X caratterizzata dai valori $x_1 = 300$, $x_2 = 200$, $x_3 = 100$ e $x_4 = 400$. Il vettore AX rappresenta i valori nutrizionali presenti nella dieta, più precisamente 2140 kcal, 141 g di proteine, 258 g di carboidrati e 64 g di grassi, ragionevolmente prossimi (eccetto che per le proteine) a quelli prescritti.

Notiamo che i sistemi lineari non sempre ammettono soluzioni, e se ne hanno queste non sono necessariamente uniche.

Esempio C.4.3. Si determinino le soluzioni, se esistono, del sistema lineare

$$\begin{cases} 6x+7y=3 \\ 2x+\ y=7 \\ 4x+\ y=18 \end{cases}$$

Le prime due equazioni hanno soluzione[12] $x = 5.75$, $y = -4.5$ sostituendo nella terza troviamo $5.75 * 4 - 4.5 = 18.5 \neq 18$. Il sistema risulta allora inconsistente. Notiamo che questa patologia non si può presentare nei sistemi omogenei ossia quelli in cui la colonna del termine noto è nulla. Il vettore con tutte le componenti uguali a 0 ne è sempre una soluzione.

Esempio C.4.4. Si determinino le soluzioni, se esistono, del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ x_3=3 \\ 2x_1-x_2+3x_3=7 \\ 4x_1+x_2+5x_3=13 \end{cases}$$

[11] Si può ricavare con R scrivendo la matrice A dei coefficienti con il comando

```
> A = matrix( c(2.15, 0.269, 0, 0.115, 1.41, 0.05, 0.285, 0.007,
+           1.33, 0.1, 0.01, 0.08, 2.7, 0.1, 0.5, 0.05), ncol = 4)
> b = c(2350, 60, 365, 85)
> solve(A, b)

## [1]  -367.30 -1360.36   778.37  1489.84
```

[12] possono ricavare con R scrivendo la matrice A dei coefficienti con il comando

```
> (A = matrix(c(6,2,7,1),ncol=2))

##      [,1] [,2]
## [1,]    6    7
## [2,]    2    1

> b = c(3,7)
> solve(A,b)

## [1]  5.75 -4.50
```

Questa volta la terza equazione è superflua perché se sommiamo il doppio della prima e la seconda otteniamo proprio la terza. Possiamo allora considerare solo le prime due equazioni

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ x_3=3 \\ 2x_1-x_2+3x_3=7 \end{cases}$$

ricavare dalla prima x_1 e sostituire nella seconda

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 \\ 2(3 - x_2 - x_3) - x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 \\ x_2 = -1/3 + x_3/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10/3 - 4/3x_3 \\ x_2 = -1/3 + x_3/3 \end{cases}$$

o in forma vettoriale

$$X = X_0 + x_3Y \quad X_0 = \begin{bmatrix} 10/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{C.4.8}$$

da cui risulta che le soluzioni si possono esprimere come somma del vettore X_0 e di arbitrari multipli del vettore Y. Si verifichi che si hanno le relazioni $AX_0 = B$, $AY_0 = 0$, dove A indica la matrice dei coefficienti del sistema (C.4.4). La soluzione si esprime dunque come somma di arbitrari multipli di una soluzione Y del sistema omogeneo, ottenuto ponendo uguale a 0 il termine noto, e di una soluzione X_0 del sistema stesso.

Esercizi e complementi

1. Trovare le soluzioni (se ce ne sono) dei seguenti sistemi lineari. Nel caso di un infinito numero di soluzioni, esprimere le medesime come somma di un vettore a 3 componenti, più arbitrari multipli di un altro vettore.

(a) $\begin{cases} x-\ 2y+\ 3z=5 \\ 2x+\ 2y-\ \ z=6 \\ -x-10y+11z=3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y+4z=3 \\ 2x+7y+5z=2 \\ 4x+5y+7z=1 \end{cases}$

2. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} 3x + ry = 4 \\ rx + 2y = 3 \end{cases}$ nelle incognite x ed y. Dire per quali valori del parametro r il sistema ha eventualmente una sola, nessuna, o infinite soluzioni. Risolvere il sistema.

3. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} 10x + (10+\epsilon)y = 20 \\ (10-\epsilon)x + 10y = 20 \end{cases}$ nelle incognite x ed y. Dire per quali valori del parametro ϵ il sistema ha eventualmente una sola, nessuna, o infinite soluzioni. Risolvere il sistema. Esaminare i casi $\epsilon = 0.1$ e $\epsilon = -0.1$.

4. Nell'analisi tramite spettrometria di massa si ha la relazione $h_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}c_j$ tra l'altezza del picco i-esimo e le concentrazioni di ioni di tipo j. In genere sono note le costanti m_{ij}. Sperimentalmente si ricavano le altezze dei picchi. Il sistema lineare consente allora di determinare le concentrazioni.

5. Sia data la matrice $A = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determinare (se esiste) una soluzione del sistema $AX = \mathbf{0}$, sotto l'ulteriore condizione che la somma delle componenti di X sia uguale ad 1.

C.4.3. Prodotto di matrici

Generalizzando il prodotto di una matrice A per un vettore colonna possiamo definire il prodotto della matrice A di dimensione $m \times n$ per una matrice B di dimensione $n \times k$ come

$$AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,k}} \quad c_{ij} = A_i \cdot B_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\underset{m\times \cancel{n}}{A} \quad \underset{\cancel{n}\times k}{B} = \underset{m\times k}{C}$$

Si può calcolare il prodotto di A ed B se si può «cancellare» l'indice intermedio

Esempio C.4.5. Calcoliamo il prodotto

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+2*1 & 1*0+2*0 & 1*4+2*3 \\ -1*2+0*1 & -1*0+0*0 & -1*4+0*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che abbiamo potuto moltiplicare nell'ordine dato ma non avremmo potuto farlo nell'ordine opposto.

Esempio C.4.6. Calcoliamo i prodotti

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*7+2*4 & 1*1+2*3 \\ 3*7+4*4 & 3*1+4*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 7 \\ 37 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7*1+1*3 & 7*2+1*4 \\ 4*1+3*3 & 4*2+3*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$$

I risultati ottenuti sono diversi!

Mentre il prodotto di due matrici $m \times n$ e $n \times k$ fornisce una matrice $m \times k$, il prodotto nell'ordine opposto è possibile solo se $m = k$ ed in tal caso è una matrice di dimensione n. Notiamo infine che il prodotto di matrici ha le seguenti proprietà:

1. $(c\,A)B = c(AB) = A(c\,B)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $A(BC) = (AB)C$

Esercizi e complementi

1. Si considerino le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 13 & 20 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Si determinino tutti i prodotti possibili tra due di queste matrici. Si può calcolare $B^3 = BBB$?

C.5. Matrici identità, matrici inverse e determinanti

Chiamiamo matrice quadrata una matrice con lo stesso numero di righe e di colonne. Se n è il numero di righe (o di colonne) diremo che la matrice quadrata ha **ordine** n. La matrice quadrata che ha ingressi nulli eccetto che sulla diagonale principale (vedi la formula (C.5.1)) e con ingressi uguali ad 1 sulla diagonale principale è detta **matrice identità** ed indicata col simbolo $\mathbb{I}$ o $\mathbb{I}_n$ quando se ne voglia precisare il tipo.

$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots\dots & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{C.5.1}$$

Se A è una matrice $m \times n$ si ha

$$A\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_m A = A \tag{C.5.2}$$

ossia la matrice identità di tipo opportuno moltiplicata a destra o a sinistra per una matrice A fornisce di nuovo A. All'inizio di questa sezione abbiamo considerato la semplice equazione $ax = b$. Abbiamo visto che se $a \neq 0$ allora possiamo moltiplicare per l'inverso di a e ricavare $x = a^{-1}b$. L'inverso di a ha la proprietà che $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$. Allo stesso modo diciamo che una matrice quadrata A di ordine n è **invertibile** quando esiste una matrice X quadrata $n \times n$, tale che

$$AX = XA = \mathbb{I}_n$$

Tale X è detta allora **matrice inversa** della matrice A. Notiamo che se A è invertibile la matrice inversa è unica. Infatti se avessimo due matrici X ed X' che verificano simultaneamente $AX = XA = \mathbb{I}$ e $AX' = X'A = \mathbb{I}$ avremmo

$$X' = X'\mathbb{I} = X'AX = \mathbb{I}X = X$$

Indicheremo con A^{-1} la matrice inversa della matrice A.
Se abbiamo un sistema $AX = B$ dove A è una matrice quadrata invertibile e B è una qualunque matrice, allora moltiplicando entrambi i membri (a sinistra) per A^{-1} otteniamo

$$X = A^{-1}B$$

Quindi la conoscenza di A^{-1} ci consente di ricavare direttamente la soluzione (unica, in questo caso) di $AX = B$, per qualunque scelta di B.

C.5.1. Il determinante

C.5.1.1. Caso 2×2

Consideriamo ora un generico sistema 2×2:

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

Le equazioni del sistema rappresentano due rette nel piano. La prima retta è verticale se $b = 0$, altrimenti ha pendenza data da $-a/b$. La seconda retta è verticale se $d = 0$, altrimenti ha pendenza $-c/d$. Le rette risultano parallele se sono ambedue verticali o se hanno ugual pendenza. In ambo i casi si ha

$$ad - bc = 0$$

Viceversa se $ad - bc \neq 0$ le rette non sono parallele e si intersecano quindi in un unico punto. Consideriamo la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Chiamiamo **determinante** di A e lo indichiamo con il simbolo $\det(A)$ l'espressione

$$\det(A) = ad - bc$$

Possiamo concludere che se $\det(A) \neq 0$ allora il sistema ammette un'unica soluzione quali che siano u e v; in particolare, assumendo $\det(A) \neq 0$, hanno soluzione unica i sistemi

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo allora risolvere

$$A \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi esiste una matrice X tale che

$$AX = \mathbb{I}_2$$

Si può calcolare X esplicitamente ottenendo

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

C.5.1.2. Caso generale

La nozione qui esposta si generalizza a matrici quadrate arbitrarie. Assegnata un'arbitraria matrice quadrata A le si può associare un numero che chiameremo determinante; non ne riportiamo la formula ma con R basterà scrivere `det(A)`. Notiamo ancora che

$$\det(A) = \det(A^T) \tag{C.5.3}$$

Come prima, se $\det(A)$ non è nullo, allora possiamo trovare una matrice quadrata X tale che $AX = \mathbb{I}$. Quando abbiamo introdotto la matrice inversa (vedi p. 17) abbiamo anche richiesto la condizione $XA = \mathbb{I}$.

L'equazione C.5.3 comporta che se $AX = \mathbb{I}$ ha soluzione, anche il sistema $A^T Y = \mathbb{I}$ ha soluzione. Trasponendo quest'ultima equazione, ed usando le equazioni (C.3.1) e (C.3.2) si ottiene $Y^T A = \mathbb{I}$. Moltiplicando per X a destra si trova proprio $Y^T = X$ e quindi $XA = \mathbb{I}$ come avevamo promesso. Ne concludiamo allora che la matrice A è invertibile.

Una matrice è **invertibile** se e solo se il suo determinante è **diverso** da 0

C.5.2. Calcolo della matrice inversa: esempi

Per determinare A^{-1} nel caso generale consideriamo il sistema $AX = \mathbb{I}$ con matrice incognita X. Vediamo come procedere con R.

Laboratorio C.5.1. Determinare la matrice inversa, se esiste, della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Risolvere il sistema lineare $AX = B$ con

$$B = \begin{bmatrix} 34 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Con R è immediato:

```
> (A=matrix(c(2,4,8,3,1,2,7,5,1),ncol=3,byrow=TRUE))

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    4    8
## [2,]    3    1    2
## [3,]    7    5    1

> library(MASS) ##per lavorare con le frazioni
> fractions(solve(A))# matrice in forma frazionaria

##      [,1]  [,2]  [,3]
## [1,] -1/10   2/5     0
## [2,] 11/90  -3/5   2/9
## [3,]  4/45   1/5  -1/9
```

La soluzione del sistema è $X = A^{-1}B$

```
> B=c(34,11,20)
> solve(A)%*%B

##      [,1]
## [1,]    1
## [2,]    2
## [3,]    3
```

Esercizi e complementi

1. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

e determinare la matrice inversa, se esiste, della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Si calcoli con R l'inversa delle matrici

1. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ *2.* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 5/3 \\ -2/27 & 1/9 & 7/27 \\ 2/3 & 0 & -7/3 \end{bmatrix}$ *4.* $\begin{bmatrix} 2/13 & 3/13 & 0 \\ -3/13 & 2/13 & 0 \\ -3/26 & 1/13 & -1/2 \end{bmatrix}$

3. Sia P la matrice $P = A + \mathbb{I}$, con $A = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determinare la matrice inversa di A (se esiste) e trovare un esponente n tale che la matrice $P^n = \underbrace{PPP\ldots P}_{n \text{ volte}}$ abbia tutti gli elementi (strettamente) positivi.

C.5.2.1. Matrice di contagio

Consideriamo la trasmissione di una malattia contagiosa. Supponiamo di avere due infetti X e Y e tre persone che, per mantenerne la privacy, chiameremo A, B e C; chiediamo ad A, B e C se hanno avuto contatti con X ed Y; se attribuiamo alla risposta affermativa il numero 1 ed alla risposta negativa il numero 0 possiamo costruire una tabella così fatta:

	A	B	C
X	0	1	1
Y	1	1	0

Questa tabella è detta matrice di contagio. Interroghiamo ora altre 4 persone, che conveniamo di chiamare P, Q, R e S; chiediamo loro se hanno avuto contatti con A, B e C; trascrivendo le risposte otteniamo la tabella

	P	Q	R	S
A	0	0	1	1
B	1	0	1	0
C	1	0	0	0

Calcoliamo ora il prodotto delle due matrici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo riscrivere il risultato evidenziando sulle colonne i nomi degli intervistati

	P	Q	R	S
X	2	0	1	0
Y	1	0	2	1

Visualizziamo le operazioni che determinano per esempio l'elemento della prima riga e della terza colonna del prodotto:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "1"] & \\
X \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "1"] \arrow[dr, "1"'] & B \arrow[r, "1"] & R \\
 & C \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Il prodotto di matrici in questo caso ci fornisce esattamente il numero di combinazioni tramite le quali un membro del terzo gruppo (P, Q, R e S) può essere stato contagiato da un membro del primo gruppo (X e Y). La matrice risultante è anche detta matrice di contagio del secondo ordine.

Esercizi e complementi

1. Il modo che abbiamo scelto per rappresentare i coefficienti di un sistema lineare è puramente convenzionale. Nei *Nove capitoli dell'arte matematica*, scritti in Cina tra il 200 ed il 100 a.C., ci si pone il seguente problema: siano date tre varietà di grano; 3 mazzi della prima varietà, 2 della seconda e 1 della terza costituiscono 39 misure; 2 mazzi della prima varietà, 3 della seconda e 1 della terza sono 34 misure, mentre 1 mazzo della prima varietà, 2 della seconda e 3 della terza sono 26 misure. Ci si chiede la misura di un mazzo di ciascuna varietà. Risolvere il sistema!

2. Determinare la matrice trasposta e la matrice inversa (se esiste) di $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Calcolare il determinante delle matrici

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *2.* $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ *3.* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ *4.* $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

C.6. Autovalori ed autovettori

Esempio C.6.1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Se moltiplichiamo A per il vettore $\boldsymbol{v} = [a, b]^T$, otteniamo

$$A\,\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 9a + 4b \\ 8a + 5b \end{bmatrix}$$

Il risultato non è in generale un multiplo del vettore $\boldsymbol{v}$. Se però $\boldsymbol{v} = [1, 1]^T$ (o un suo multiplo) allora $A\,\boldsymbol{v} = 13\,\boldsymbol{v}$, mentre se $\boldsymbol{v} = [1, -2]^T$ (o un suo multiplo) si ha $A\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Abbiamo quindi trovato due direzioni in cui la matrice agisce proprio come la moltiplicazione per uno scalare. Nelle altre direzioni la situazione è più complicata. Diversi problemi risultano di gran lunga semplificati dalla conoscenza delle direzioni in cui la matrice agisce come uno scalare.

Esempio C.6.2. [Momento di inerzia] Consideriamo un insieme di punti materiali (ma potremmo anche generalizzare al caso di corpi continui) P_k di massa m_k con $k = 1, ..., N$; è utile introdurre una matrice, detta **matrice di inerzia**, che caratterizza l'inerzia del sistema rispetto ad un centro di rotazione O. Se le coordinate dei punti P_k in un sistema d'assi centrato in O sono date da (x_k, y_k, z_k) allora la matrice di inerzia ha l'espressione simmetrica

$$I = \sum_{k=1}^{N} m_k \begin{bmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -x_k y_k & x_k^2 + z_k^2 & -y_k z_k \\ -x_k z_k & -y_k z_k & x_k^2 + y_k^2 \end{bmatrix}$$

La matrice I consente di esprimere l'energia cinetica ed il momento angolare dell'insieme di punti. Esistono delle direzioni spaziali privilegiate e sono quelle lungo le quali la matrice I agisce come un numero. In altre parole possiamo ricercare le soluzioni (X, λ) di $IX = \lambda X$. Le direzioni X trovate si chiamano assi principali di inerzia ed i valori di λ momenti principali di inerzia.

Esempio C.6.3. [Matrice di evoluzione] Consideriamo una popolazione bisessuata e diploide e supponiamo che la percentuale di alleli di tipo A e tipo a sia diversa inizialmente tra maschi e femmine. La matrice

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

rappresenta l'evoluzione di tali percentuali nel tempo,[13] più precisamente

$$\begin{bmatrix} M_{t+1} \\ F_{t+1} \end{bmatrix} = \mathcal{E} \begin{bmatrix} M_t \\ F_t \end{bmatrix} \tag{C.6.1}$$

dove M_t e F_t indicano la percentuale di alleli di tipo A tra i maschi e le femmine rispettivamente, alla t-esima generazione. Ci proponiamo di determinare i valori di M_t e di F_t; iterando la relazione (C.6.1) si ha

$$\begin{bmatrix} M_t \\ F_t \end{bmatrix} = \mathcal{E}^t \begin{bmatrix} M_0 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

In questo caso la matrice è semplice ed è possibile calcolarne direttamente le potenze. Ma se la matrice fosse più complicata? Notiamo che

$$\mathcal{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{E} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se poniamo

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} M_0 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

possiamo scrivere $X_0 = (p + 2q)v_1/3 + (p - q)v_2/3$. Quindi

$$\mathcal{E}^t X_0 = \frac{1}{3}(p + 2q)v_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^t (p - q)v_2$$

Poiché $(-1/2)^t \to 0$ per $t \to \infty$ dopo alcune generazioni si ha $M_t \approx F_t \approx (p+2q)/3$.

[13] Supponiamo qui che il gene sia legato al cromosoma X. I maschi YX ricevono tale cromosoma dalla madre, le femmine XX da entrambi i genitori.

C.6.1. Ricerca degli autovalori

Sia A una matrice quadrata; consideriamo in astratto il problema della determinazione di coppie $(\lambda, \boldsymbol{v})$, dove λ è un numero e $\boldsymbol{v}$ un vettore, tali che

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{C.6.2}$$

Per quanto visto è di interesse determinare sia i valori possibili dello scalare λ che chiameremo **autovalori** della matrice A, sia i corrispondenti vettori colonna (che scriveremo però in riga tra parentesi tonde), $\boldsymbol{v}$ che, se diversi da $\mathbf{0}$, chiameremo **autovettori**. Se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ qualunque valore di λ verifica (C.6.2), ma il caso è privo di interesse. Inoltre se la coppia $(\boldsymbol{v}, \lambda)$ verifica (C.6.2) per un dato valore di λ, anche i multipli di $\boldsymbol{v}$ la verificano. Ripetiamo che $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ è una soluzione, ma noi cerchiamo soluzioni $\boldsymbol{v}$ non nulle per cui se $\boldsymbol{v}$ è una soluzione non nulla possiamo sempre normalizzarla dividendo per la sua norma. Con R il comando `eigen` fornisce sia autovettori normalizzati (eigenvectors) sia autovalori (eigenvalues)

```
> A=matrix(c(9,4,8,5),ncol=2,byrow=T)
> eigen(A)
## eigen() decomposition
## $values
## [1] 13  1
##
## $vectors
##           [,1]       [,2]
## [1,] 0.7071068 -0.4472136
## [2,] 0.7071068  0.8944272
```

Esercizi e complementi

1. Determinare autovalori ed autovettori delle matrici
1. $\begin{bmatrix} 3 & -1/2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix}$ *2.* $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *3.* $\begin{bmatrix} 1 & -70 & 18 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -40 & 13 \end{bmatrix}$ *4.* $\begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 2 \\ -6 & 0 & 6 \\ -4 & -1/2 & 5 \end{bmatrix}$

2. Si consideri il «quadrato magico» (tratto sempre dai *"Nove capitoli dell'Arte Matematica"*)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Determinarne gli autovalori.

Indice analitico