Testing psicologico

Modelli e metodi statistici per la misurazione in psicologia

Antonio Calcagnì

Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione (DPSS)
Università di Padova

A.A. 2019/2020

Introduzione

La misurazione di un fenomeno è un'attività intrinsecamente soggetta ad incertezza.

Sia la teoria degli errori classica che l'approccio GUM sottolineano l'inevitabile presenza dell'incertezza nel processo misurativo.

La misurazione è alla base del processo di scoperta scientifica, ragione per cui studiare modi e forme dell'incertezza nella misurazione è un aspetto imprescindibile sia per le discipline applicate che per quelle teoriche.

Introduzione

Tratto da: *Taylor, J. (1997). Introduction to error analysis. University Science Book.*

«Consider, for example, a carpenter who must measure the height of a doorway before installing a door. As a first rough measurement, he might simply look at the doorway and estimate its height as 210 cm. This crude measurement is certainly subject to uncertainty. If pressed, the carpenter might express this uncertainty by admitting that the height could be anywhere between 205 cm and 215 cm.

If he wanted a more accurate measurement, he would use a tape measure and might find the height is 211.3 cm. This measurement is certainly more precise than his original estimate, but it is obviously still subject to some uncertainty, because it is impossible for him to know the height to be exactly 211.3000 cm rather than 211.3001 cm, for example.

Introduzione

Tratto da: *Taylor, J. (1997). Introduction to error analysis. University Science Book.*

This remaining uncertainty has many sources [...]. For example, one source of uncertainty might be that poor lighting hampers reading of the tape; this problem could be corrected by improving the lighting.

On the other hand, some sources of uncertainty are intrinsic to the process of measurement and can never be removed entirely. By buying a better tape with closer and finer markings, the carpenter can reduce his uncertainty but cannot eliminate it entirely. Although the carpenter would now be able to measure the height with fantastic precision, he still would not know the height of the doorway exactly.

Introduzione

Tratto da: *Taylor, J. (1997). Introduction to error analysis. University Science Book.*

Furthermore, as our carpenter strives for greater precision, he will encounter an important problem of principle. He will certainly find that the height is different in different places. Even in one place, he will find that the height varies if the temperature and humidity vary, or even if he accidentally rubs off a thin layer of dirt.

Our carpenter's experiences illustrate a point generally found to be true, that is, that no physical quantity (a length, time, or temperature, for example) can be measured with complete certainty. With care, we may be able to reduce the uncertainties until they are extremely small, but to eliminate them entirely is impossible» (pp. 3-4)

Introduzione

Diverse sono le fonti di incertezza: strumento di misura, ambiente, soggetto che effettua la misurazione, proprietà intrinseche del misurando.

Le *soft measurements* risentono maggiormente del ruolo dell'incertezza che può derivare da diverse fonti: strumento di misura, variabilità naturale delle unità su cui si effettua la misurazione, costruzione del modello di misura, mutamenti dei misurandi e delle loro proprietà nelle popolazioni e nel tempo.

Misurare in psicologia (sempre che sia possibile farlo) risente di tutte queste problematiche.

Introduzione

L'incertezza è dunque una quantità ineliminabile all'interno del processo di misurazione. Abbiamo allora bisogno di una modellizzazione rigorosa che tenga conto delle sue caratteristiche e del suo comportamento. Per analizzarla e controllarla abbiamo bisogno di un **modello matematico dell'incertezza**.

Diversi modelli matematici possono essere utilizzati per rappresentare l'incertezza:

- teoria della probabilità (Kolmogorov, De Finetti)
- teoria della possibilità (Zadeh, Dubois & Prade)
- teoria delle credenze (Dempster, Shafer)
- teoria della probabilità generalizzata (imprecise probability)
- ...

Per un approfondimento:

Klir, G.J. (2006). *Uncertainty and information*. Wiley.

Introduzione

All'interno di questo corso vedremo il ruolo della **teoria della probabilità** nel modellare l'incertezza di misurazione. Questo è anche l'approccio adottato da GUM e dagli enti certificatori per la gestione dell'incertezza di misurazione.

Nel modulo corrente richiameremo alcuni aspetti principali della teoria della probabilità e dell'utilizzo di questa all'interno della statistica inferenziale. L'esposizione dei concetti segue il problema della misurazione e della gestione della sua incertezza. Per una trattazione generale invece si faccia riferimento al materiale didattico offerto durante il corso di Psicometria del II anno.

Richiami di probabilità

FONTI: P(8.2,8.3,8.6-8.9,8.11), CDM(12)

Un **esperimento aleatorio** (o prova) è un esperimento i cui esiti sono soggetti ad incerti. Mentre gli esiti possibili sono certi, ciò che è invece *soggetto ad incertezza* è l'accadere o meno di un certo esito.

La collezione di tutti gli esiti possibili di una prova aleatoria (enumerabile) è detta **spazio campionario** Ω.

Ad esempio, nel caso del lancio di due monete lo spazio campionario (finito ed enumerabile) è il seguente: $\Omega = \{cc, tt, tc, ct\}$.

Sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_m$ di Ω sono detti **eventi**.

L'evento secondo cui il primo esito del lancio è testa è definito come $A_1 = \{tt, tc\}$.

Allo stesso modo, l'evento almeno un esito è croce è il seguente $A_2 = \{cc, tc, ct\}$.

Richiami di probabilità

FONTI: P(8.2,8.3,8.6-8.9,8.11), CDM(12)

L'evento si dice che ha avuto occorrenza se almeno uno degli elementi che lo costituiscono si verifica. Ad esempio, basta che $\{tt\} \in A_1$ si verifichi per dire che A_1 ha avuto occorrenza.

Poiché gli eventi sono **insiemi**, manipolazioni tra essi possono avvenire usando le tipiche **operazioni insiemistiche** definite nell'algebra di Boole. Quindi sono ammesse le operazioni di unione, intersezione, negazione (complementazione).

Per un esempio completo su eventi e operazioni tra eventi si veda `Esempio 8.3` in P(8.8).

Due generici eventi A_1 e A_2 si dicono **incompatibili** se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ è un evento certo mentre si dicono **necessari** se $A_1 \cup A_2$ è evento certo.

Richiami di probabilità

FONTI: P(8.2,8.3,8.6-8.9,8.11), CDM(12)

Data una collezione di eventi $A_1, \dots, A_m$ di Ω, la **probabilità** $\mathbb{P}(.)$ è una funzione di insiemi tale che:

(i) $0 \leq \mathbb{P}(A_j) \leq 1$

(ii) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(A_j)$

La proprietà (ii) asserisce che quando $A_{j-1} \cap A_j = \emptyset$ per $(j = 2, \dots, m)$, ossia nel caso di eventi disgiunti a due a due (eventi incompatibili), la probabilità dell'unione di eventi è pari alla somma delle probabilità dei singoli eventi.

La misura $\mathbb{P}(.)$ può essere assegnata in diversi modi (classica, frequentista, soggettivista).

Richiami di probabilità

FONTI: P(8.2,8.3,8.6-8.9,8.11), CDM(12)

Assegnazione di $\mathbb{P}(.)$:

- **classica**: la probabilità è assegnata come rapporto tra numero di casi a favore dell'evento e il numero degli eventi possibili (rapporto tra cardinalità di insiemi)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \qquad \# := \text{cardinalità di un insieme}$$

- **frequentista**: la probabilità è assegnata usando una successione di prove aleatorie indipendenti

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_A}{n}, \qquad f_A := \text{frequenza dell'evento A}$$

- **soggettivista**: a probabilità è assegnata secondo il grado di fiducia che si ha sul sistema degli eventi (scommessa, evidenza, ecc)

Richiami di probabilità

FONTI: P(8.2,8.3,8.6-8.9,8.11), CDM(12)

Ad esempio, nel caso dell'evento $A_2 = \{cc, tc, ct\}$, la probabilità secondo l'assegnazione classica risulta

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{\#A_2}{\#\Omega} = \frac{3}{4} = 0.75$$

L'assegnazione classica costruisce $\mathbb{P}(.)$ sulla base del sistema di eventi noto in generale, ossia prima dell'esperimento aleatorio (**approccio analitico**).

L'assegnazione frequentista, invece, assegna $\mathbb{P}(.)$ dopo aver ripetuto un certo numero di volte n la prova aleatoria, dunque dopo l'esperimento aleatorio (**approccio sintetico**). Ciò richiede che la prova aleatoria sia soggetta al **principio della ripetibilità**.

▷ La **misurazione** è un esempio di esperimento aleatorio ripetibile secondo l'assegnazione frequentista.

Richiami di probabilità

Studio individuale

si ripassi P(8.11)

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Per casi empirici di rilievo spesso è difficoltoso (i) costruire spazi di probabilità e/o (ii) utilizzarli per il calcolo effettivo. A tale riguardo, l'uso delle **variabili aleatorie** fornisce una rappresentazione matematica semplificata dell'esperimento aleatorio.

L'introduzione delle variabili aleatorie, infatti, permette di definire un insieme di modelli probabilistici generali (modello Gaussiano o Normale, Esponenziale, Binomiale, ecc) utili per rappresentare e studiare diversi tipi di fenomeni aleatori.

▷ Studiare il **processo misurativo** richiede la possibilità di utilizzare un modello probabilistico noto per rappresentare il suo comportamento aleatorio. Ad esempio, il fenomeno dell'*errore casuale* è rappresentato mediante il modello Gaussiano (o Normale).

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Definizione non formale:

Una variabile aleatoria X è una regola che fa corrispondere elementi $\omega \in \Omega$ (o insiemi di sottoinsiemi di Ω) all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. È dunque una funzione di insiemi (dominio) a valori reali (codominio).

L'insieme dei valori che X può assumere è detto **supporto** S della variabile aleatoria.

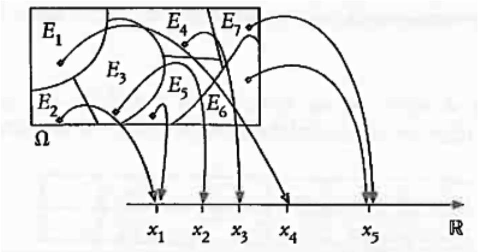
Se S è finito e numerabile (insieme discreto di numeri reali) la v.a. X è detta **discreta**. Se S è infinito (insieme dei numeri reali) X è detta **continua**.

▷ L'aggettivo *aleatorio* fa riferimento al processo (esperimento aleatorio) che sottosta alla variabile aleatoria non alla variabile di per se. Inoltre, il termine *variabile* non indica propriamente una variabile (come siamo soliti pensare) ma una *funzione misurabile*.

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Definizione non formale:



Variabile aleatoria: Corrispondenza tra eventi dello spazio campionario Ω e insieme dei numeri reali. Quest'ultimo, in figura rappresentato dalla retta orientata, è il supporto della variabile aleatoria. Fonte: P(9.2, p.152).

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esempio: Numero di teste in tre lanci di monete indipendenti

- $\Omega = \{ttt, ttc, tct, ctt, ccc, cct, ctc, tcc\}$, $\#\Omega = 2^3$
- X := “numero di teste", $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

  $X = 0$: $\{ccc\}$ *quando la v.a. assume valore zero l’evento intercettato è croce-croce-croce

  $X = 1$: $\{ctc, tcc, cct\}$

  $X = 2$: $\{ttc, tct, ctt\}$

  $X = 3$: $\{ttt\}$
- $\mathbb{P}$ definita secondo l’assegnazione classica $\mathbb{P}(A) := \frac{\#A}{\#\Omega}$

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esempio: Numero di teste in tre lanci di monete indipendenti

- $\Omega = \{ttt, ttc, tct, ctt, ccc, cct, ctc, tcc\}$, $\#\Omega = 2^3$
- $X :=$ “numero di teste", $X \in (0, 1, 2, 3)$

  $X = 0$: $\{ccc\}$ $\mathbb{Q}(X = 0) = \frac{1}{8}$

  $X = 1$: $\{ctc, tcc, cct\}$ $\mathbb{Q}(X = 1) = \frac{3}{8}$

  $X = 2$: $\{ttc, tct, ctt\}$ $\mathbb{Q}(X = 2) = \frac{3}{8}$

  $X = 3$: $\{ttt\}$ $\mathbb{Q}(X = 3) = \frac{1}{8}$
- $\mathbb{Q}$ è la misura di **probabilità indotta** da X ed è definita secondo $\mathbb{P}$

▷ S_X può essere considerato come il nuovo spazio campionario su cui assegnare una probabilità $\mathbb{Q}$.

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esempio: Lancio di un dado a sei facce e facce pari

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 6$
- X := “uscita di una faccia con numero pari", $S_X = \{0, 1\}$

  $X = 0$: $\{2, 4, 6\}$ $\mathbb{Q}(X = 0) = \frac{1}{2}$

  $X = 1$: $\{1, 3, 5\}$ $\mathbb{Q}(X = 1) = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{Q}$ è la misura di **probabilità indotta** da X

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esempio: Lanci di una moneta con arresto

Esperimento: si lancia una moneta n volte, con $\Omega = \{C, T\}$, e ci si arresta quando si verifica l'evento T.

X := "numero di estrazioni necessarie affinché si verifichi T"

Assegniamo:

- $\mathbb{P}(T) = \theta$
- $\mathbb{P}(C) = (1 - \theta)$

dove θ è una probabilità.

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esempio: Lanci di una moneta con arresto

- X := "numero di estrazioni necessarie affinché si verifichi T"
- $S_X = \{1, 2, \ldots, n\}$

  $X = 1 : \{T\}$ $\quad \mathbb{Q}(X = 1) = \theta$ $\quad$ * T si verifica alla prima estrazione

  $X = 2 : \{CT\}$ $\quad \mathbb{Q}(X = 2) = (1 - \theta)\theta$

  $X = 3 : \{CCT\}$ $\quad \mathbb{Q}(X = 3) = (1 - \theta)(1 - \theta)\theta$ $\quad$ * T si verifica alla terza estrazione

  $\vdots$

  $X = n : \{\overbrace{C \ldots}^{n-1 \text{ volte}} T\}$ $\quad \mathbb{Q}(X = n) = (1 - \theta)^{n-1}\theta$ $\quad$ * T si verifica alla n-esima estrazione

- $\mathbb{Q}$ è la misura di **probabilità indotta** da X

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esempio: Lanci di una moneta con arresto

- X := "numero di estrazioni necessarie affinché si verifichi T"
- $S_X = \{1, 2, \dots, n\}$
- Qual è la probabilità che esca testa dopo quattro lanci indipendenti, ossia $\mathbb{Q}(X > 4)$?

  $X > 4 : \{CCCT\}$ * evento corrispondente nello spazio campionario

$$\mathbb{Q}(X > 4) = 1 - \mathbb{Q}(X < 4) = 1 - [\theta + \theta(1-\theta) + \theta(1-\theta)^2 + \theta(1-\theta)^3]$$

$$= 1 - (4\theta + 6\theta^2 - 4\theta^3 + \theta^4) \quad \text{*sviluppando le potenze dei binomi}$$

$$= (1-\theta)^4$$

Variabili aleatorie

Studio individuale

 si vedano e si ripetano gli esercizi 9.1-9.3 di P(9.2)

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

L'introduzione delle variabili aleatorie permette di lavorare con spazi di probabilità più semplici formati sempre da elementi in $\mathbb{R}$. In questo modo stesse variabili aleatorie possono essere usate come *modelli* per diversi spazi campionari, definiti anche in maniera diversa tra loro.

Variabili aleatorie con supporto in (i) $\mathbb{R}$ (retta reale) sono dette **univariate**, (ii) $\mathbb{R}^2$ sono dette **bivariate**, (iii) $\mathbb{R}^k$ sono dette **multiple** (k-variate).

Esempio:

(X, Y) è una v.a. bivariata
Il supporto $S_{XY} = S_X \times S_Y$ è la *griglia* formata dal prodotto cartesiano dei supporti. Ad ogni elemento della griglia è possibile associare una probabilità $\mathbb{Q}(X = x \cap Y = y)$.

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esempio: Misurazione della temperatura corporea

Lo spazio campionario Ω dell'esperimento (aleatorio) è continuo (infinità di temperature). La v.a. $X :=$ "temperatura in gradi Celsius" può assumere qualunque valore compreso nell'intervallo, poniamo, $[0, 100]$. Tuttavia se consideriamo due eventi

$$A_1 := \text{"temperatura inferiore a 37 gradi centigradi"}$$

$$A_2 := \text{"temperatura superiore a 37 gradi centigradi"}$$

Potremmo definire la v.a. $X :=$ "febbre" con $X = 0$ in corrispondenza di A_1 e $X = 1$ in corrispondenza di A_2. In questo caso la v.a. è discreta mentre lo spazio campionario originario è continuo.

Potremmo assegnare $\mathbb{Q}(X \in S_X)$ mediante un esperimento (ripetuto) di misurazione della temperatura di un gruppo di individui. In questo caso l'assegnazione è frequentista (o empirica).

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Per identificare una v.a. occorre determinare:

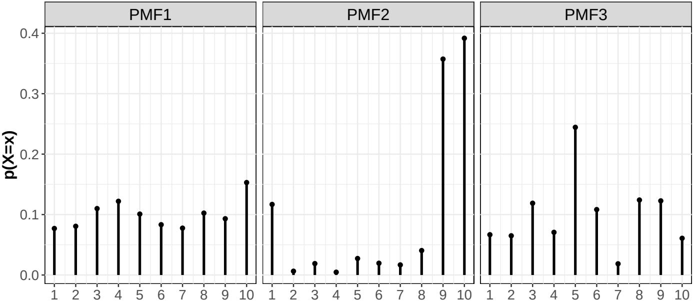
- l'insieme dei valori (discreto o continuo) che X può assumere (determinazione di S_X)
- la modalità con cui $\mathbb{Q}(.)$ assegna le probabilità su S_X:

  PMF - funzione di **probabilità di massa** (v.a. discrete)
  PDF - funzione di **densità** (v.a. continue)
  CDF - funzione di **ripartizione** (v.a. discrete e continue)

La **funzione di ripartizione** permette di calcolare la **distribuzione di probabilità** di X, la conoscenza della quale dà completa conoscenza sul comportamento della variabile aleatoria stessa.

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)



Probabilità di massa (PMF): Esempi di tre distribuzioni di probabilità per X discreta.

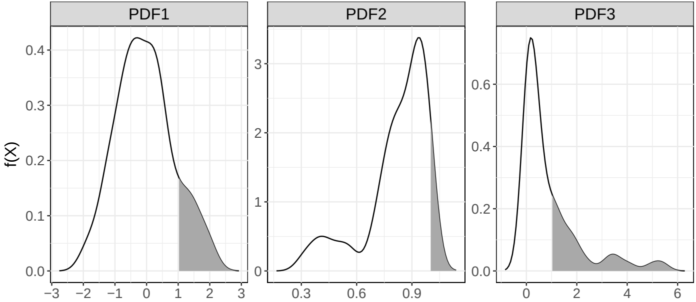
Note:

$$p(X = x) \geq 0$$

$$\sum_{x \in S_X} p(X = x) = 1$$

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)



Funzione di densità (PDF): Esempi di tre distribuzioni di probabilità per X continua. L'area evidenziata in grigio corrisponde all'intervallo $[x_0, x_0 + \delta]$ con $\delta > 0$.
Note:

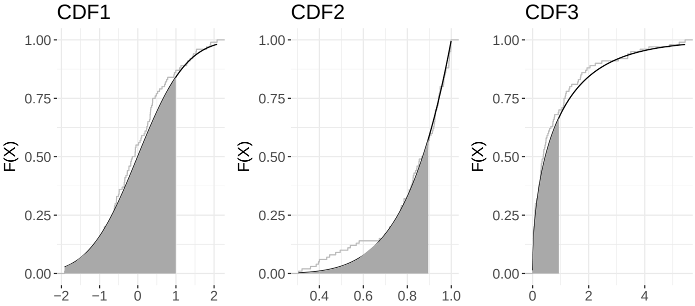
$$f(x_0 \leq X \leq x_0 + \delta) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq 0 \qquad (\delta > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$f(x_0) = 0$$

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)



Funzione di ripartizione (CDF): Esempi di tre funzioni di ripartizione per X continua. L'area evidenziata in grigio corrisponde all'intervallo $[x_0, x_0 + \delta]$ con $\delta > 0$.
Note:

$$F(x_0) = \mathbb{Q}(X \leq x_0) = \sum_{\substack{x \leq x_0 \\ x \in S_X}} p(x) \qquad \text{[v.a. discreta]}$$

$$F(x_0) = \mathbb{Q}(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx \qquad \text{[v.a. continua]}$$

Esercizio:

Una v.a. X continua ha distribuzione di probabilità $f(x) = 3x^2$ quando $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 0$ quando $x \notin [0, 1]$.

(a) $f(x)$ è una PDF?

(b) Se $f(x)$ è una PDF, quanto vale $\mathbb{Q}(0.5 < X < 1)$?

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esercizio:

Una v.a. X continua ha distribuzione di probabilità $f(x) = 3x^2$ quando $x \in [0,1]$ e $f(x) = 0$ quando $x \notin [0,1]$.

(a) $f(x)$ è una PDF?

(b) Se $f(x)$ è una PDF, quanto vale $\mathbb{Q}(0.5 < X < 1)$?

—

(a) Verifichiamo che $\int_0^1 f(x)dx = 1$ *calcolo dell'*integrale definito*

$$\int_0^1 3x^2 dx = 3\int_0^1 x^2 dx = 3\overbrace{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}^{\text{primitiva di } x^2} = 3\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 1$$

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

<u>Esercizio:</u>

Una v.a. X continua ha distribuzione di probabilità $f(x) = 3x^2$ quando $x \in [0,1]$ e $f(x) = 0$ quando $x \notin [0,1]$.

(a) $f(x)$ è una PDF?

(b) Se $f(x)$ è una PDF, quanto vale $\mathbb{Q}(0.5 < X < 1)$?

—

(b) Calcoliamo ora $\int_{0.5}^{1} f(x)dx$

$$\int_{0.5}^{1} 3x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0.5}^{1} = 3\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0.5^3}{3}\right) = 0.875$$

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Esercizio:

Una v.a. X continua ha distribuzione di probabilità $f(x) = 3x^2$ quando $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 0$ quando $x \notin [0, 1]$.

(a) $f(x)$ è una PDF?

(b) Se $f(x)$ è una PDF, quanto vale $\mathbb{Q}(0.5 < X < 1)$?

▷ Per calcolare le probabilità utilizzeremo comodamente la **funzione di ripartizione** $F(X \leq x_0)$ così come implementata in R e così come ampiamente visto nel corso di Psicometria del secondo anno.

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Valori medi di variabili aleatorie

Il comportamento di una v.a. X, se è nota $F(X)$, può essere sintetizzato da indici che esprimono alcune caratteristiche delle v.a. come ad esempio la *posizione*, la *dispersione*, e la *forma*.

In statistica descrittiva si è parlato, ad esempio, di media, varianza e asimmetria come tre importanti indici di sintesi (vedi corso di Psicometria).

In maniera simile, vedremo come definire media (o valore atteso) e varianza per variabili aleatorie.

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Valori medi di variabili aleatorie

Valore atteso: indica l'aspettativa che si ha *in media* rispetto agli esiti dell'esperimento aleatorio associato alla v.a. X:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in S_X} x\, p(x) \qquad [v.a.discreta]$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx \qquad [v.a.continua]$$

▷ Il valore atteso non deve essere confuso con la *media aritmetica* usata in statistica descrittiva: mentre quest'ultima è una sintesi della distribuzione di frequenze di una variabile a livello campionario, il valore atteso è l'*esito medio atteso* a seguito di un esperimento aleatorio.

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Valori medi di variabili aleatorie

Varianza: indica l'aspettativa riguardo alla distribuzione degli esiti (molto dispersi, poco dispersi) dell'esperimento aleatorio associato alla v.a. X:

$$\mathbb{V}\text{ar}\left[X\right] = \sum_{x \in S_X} (x - \mathbb{E}\left[X\right])^2 p(x) \qquad [v.a.discreta]$$

$$\mathbb{V}\text{ar}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}\left[X\right])^2 f(x) dx \qquad [v.a.continua]$$

▷ La varianza è definita qui *in generale* a livello delle v.a. Il simbolo σ_X^2, sebbene indichi qualcosa di diverso (es.: parametro di un modello Normale), è spesso usato in maniera analogo a $\mathbb{V}\text{ar}\left[X\right]$.

Variabili aleatorie
Studio individuale

si vedano e si ripetano gli esercizi 9.8 e 9.9 di P(9.6)

Variabili aleatorie

FONTI: P(9.1-9.6), CDM(13)

Quando una v.a. X possiede valore atteso $\mathbb{E}[X] = \mu$ e varianza $\mathbb{V}\text{ar}[X] = \sigma^2$ *finiti* (ossia è possibile calcolarne il valore), la v.a.:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}$$

ottenuta per trasformazione da X è detta **v.a. standardizzata** e possiede le seguenti proprietà:

$$\mathbb{E}[Z] = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{V}\text{ar}[Z] = 1$$

Un uso importante della v.a. standardizzata, come visto nel modulo [A], è nella **modellizzazione dell'errore di misura**: infatti dopo un elevato numero misurazioni ci attendiamo che in media le misurazioni abbiano errore pari a zero ed una dispersione contenuta.

Modelli probabilistici notevoli

FONTI: P(10), CDM(14)

Diversi esperimenti aleatori, anche se rappresentati con spazi campionari differenti, possono essere rappresentati da medesimi modelli probabilistici (es.: Normale, Binomiale, Gamma). Molti di questi modelli appartengono ad una stessa *famiglia parametrica* di modelli (es.: famiglia esponenziale) il cui comportamento è governato da un insieme di **parametri** a valore reale, di solito indicati genericamente con $\boldsymbol{\theta}$.

Esempio: l'estrazione di una pallina da un'urna, la scelta di acquisto di un prodotto sono esperimenti aleatori (diversi tra loro) che possono essere rappresentati con un modello *Binomiale*. La rappresentazione dell'errore di misura legato ad un termostato oppure ad uno strumento psicometrico è fatta attraverso un modello *Normale*.

In generale, diremo che una v.a. X (discreta o continua) si distribuisce secondo un certo modello F parametrizzato mediante $\boldsymbol{\theta}$:

$$X \sim F(x; \boldsymbol{\theta})$$

Alternativamente diremo che X segue F in legge oppure che X è distribuita secondo la legge F, ecc. Con F intenderemo la funzione di ripartizione (che è l'*integrale* della funzione di densità o della distribuzione di massa).

Modelli probabilistici notevoli

FONTI: P(10), CDM(14)

Modello	*Notazione*	S_X	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$
Uniforme	$\mathrm{U}(x;\alpha,\beta)$	$[\alpha,\beta]$	$-\infty < \alpha < \beta < \infty$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
Normale	$\mathrm{N}(x;\mu,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+_{\{0\}}$	μ	σ^2
Esponenziale	$\mathrm{Exp}(x;\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Chi-quadrato	$\chi^2(x;k)$	$\mathbb{R}^+$	$k \in \mathbb{N}$	k	$2k$
Laplace	$\mathrm{Lapl}(x;\mu,b)$	$\mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$	μ	$2b^2$

Modelli probabilistici notevoli

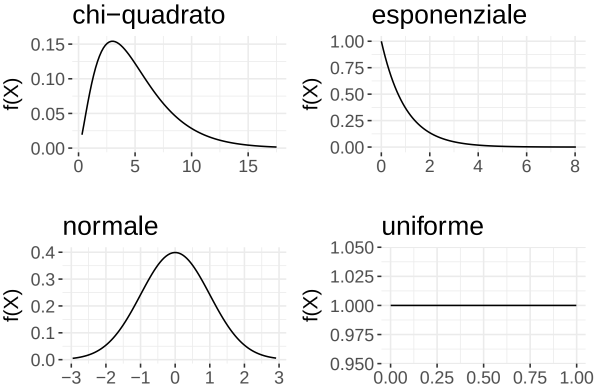
FONTI: P(10), CDM(14)

Modello	*Notazione*	S_X	$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$
Binomiale	$\mathrm{Bin}(x; n, \pi)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$n \in \mathbb{N}, \pi \in [0, 1]$	$n\pi$	$n\pi(1-\pi)$
Poisson	$\mathrm{Poi}(x; \lambda)$	$\mathbb{N}$	$n \in \mathbb{N}$	λ	λ
Geometrica	$\mathrm{G}(x; \pi)$	$\{1, \ldots, n\}$	$\pi \in [0, 1]$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1-\pi}{\pi^2}$

▷ Una lista dei vari modelli probabilistici è disponibile su:
`https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_probability_distributions`

Modelli probabilistici notevoli

FONTI: P(10), CDM(14)



Densità di probabilità (PDF): Alcuni esempi di distribuzioni di probabilità continue.

Teoremi limite

FONTI: P(11.2,11.3), CDM(16)

Nel modulo [A] abbiamo ampiamente discusso il ruolo dell'incertezza nella misurazione: ripetere il processo di misurazione un numero molto elevato di volte, nelle medesime condizioni, fa diminuire l'errore associato alla misurazione (ed il misurando è misurato meglio).

Abbiamo anche affermato che la media delle misurazioni è una buona stima del misurando, poiché all'aumentare delle misurazioni la media tende ad avvicinarsi al vero valore da misurare.

Nel seguito vedremo due importanti teoremi alla base di tali risultati.

Teoremi limite

FONTI: P(11.2,11.3), CDM(16)

Legge (debole) dei grandi numeri

Sia $X_1, \ldots, X_n$ una *successione* (elenco ordinato) di v.a. indipendenti e identicamente distribuite con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathbb{V}\text{ar}[X_i] = \sigma^2$ (finiti ed uguali per ogni termine della successione) e sia

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_i X_i$$

la v.a. <u>media</u> degli n termini della successione, allora per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ (piccolo a piacere) si ha

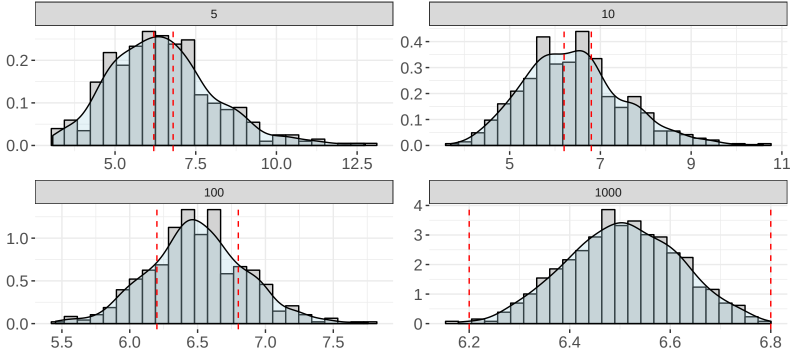
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\mu - \epsilon < \overline{X}_n < \mu + \epsilon\right) = 1}$$

ossia che al crescere di n la probabilità che la media delle v.a. $X_1, \ldots, X_n$ si trovi in un intorno piccolo di μ è pari ad 1.

Ciò indica che ripetendo la misurazione un numero infinito di volte, la media delle misurazioni sarà vicina al valore vero del misurando con probabilità crescente e proporzionale a n.

Teoremi limite

FONTI: P(11.2,11.3), CDM(16)



Legge debole dei grandi numeri: Distribuzione di frequenza e stima della funzione di densità per $n = 5, 10, 100, 1000$. In tutte le prove, $X_i \sim \chi^2(k = 6.5)$ mentre le linee tratteggiate indicano l'intorno $I_{\epsilon,k} = [k \pm \epsilon]$ con $\epsilon = 0.3$. Come possiamo notare $I_{\epsilon,k}$ cresce in lunghezza al crescere di n:
$\mathbb{P}\left(\overline{X}_{n=5} \in I_{\epsilon,k}\right) = 0.162$, $\mathbb{P}\left(\overline{X}_{n=10} \in I_{\epsilon,k}\right) = 0.228$,
$\mathbb{P}\left(\overline{X}_{n=100} \in I_{\epsilon,k}\right) = 0.614$, $\mathbb{P}\left(\overline{X}_{n=1000} \in I_{\epsilon,k}\right) = 0.998$.

Teoremi limite

FONTI: P(11.2,11.3), CDM(16)

Teorema del limite centrale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ una *successione* di v.a. indipendenti e identicamente distribuite con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $\mathbb{V}\text{ar}[X_i] = \sigma^2$ (finiti ed uguali per ogni termine della successione) e sia

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

la v.a. standardizzata con $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ e $\mathbb{V}\text{ar}[Z_n] = 1$, si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

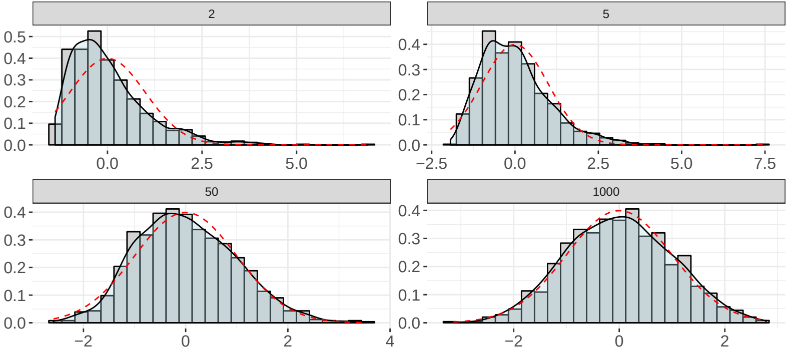
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \mathbb{P}(Z \leq x)} \quad \text{con} \quad Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

ossia che la distribuzione limite Z_n ha sempre la stessa distribuzione (funzione di ripartizione) indipendentemente dalla distribuzione di $X_1, \ldots, X_n$ e questa distribuzione è quella Normale con media nulla e varianza unitaria.

Mentre la legge dei grandi numeri ha evidenziato come i valori della v.a. $\overline{X}_n$ possono essere vicini o lontani a μ, il teorema del limite centrale è di aiuto nel quantificare tale vicinanza che è nell'ordine di $\mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Teoremi limite

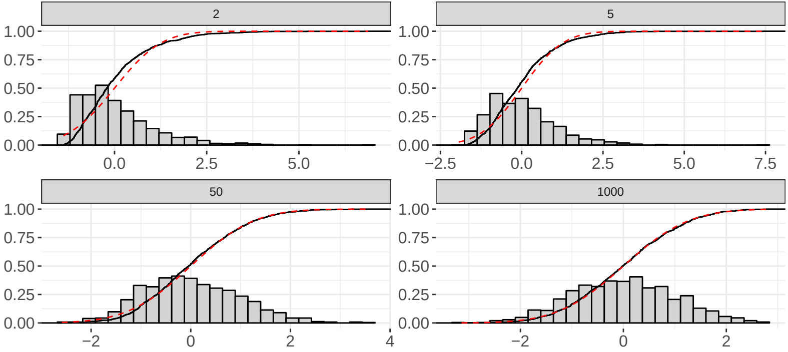
FONTI: P(11.2,11.3), CDM(16)



Teorema del limite centrale: Distribuzione di frequenza e stima della funzione di densità per $n = 2, 5, 50, 1000$. In tutte le prove, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda = 1.75)$. Come possiamo notare al crescere di n, la densità Z_n tende *in distribuzione* alla normale standardizzata N(0, 1) rappresentata dalla curva rossa tratteggiata.

Teoremi limite

FONTI: P(11.2,11.3), CDM(16)



Teorema del limite centrale: Distribuzione di frequenza e stima della funzione di ripartizione per $n = 2, 5, 50, 1000$. In tutte le prove, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda = 1.75)$. Come possiamo notare al crescere di n, la funzione di ripartizione Z_n tende *in distribuzione* alla funzione di ripartizione normale standardizzata rappresentata dalla curva rossa tratteggiata.

Teoremi limite

FONTI: P(11.2,11.3), CDM(16)

Di entrambi i teoremi esistono diverse varianti che si ottengono rilassando alcune assunzioni sulla natura delle v.a. coinvolte nella successione (es.: varianza differente, indipendenza debole).

Il teorema del limite centrale trova innumerevoli applicazioni nell'ambito del calcolo delle probabilità, dell'approssimazione di distribuzioni di probabilità, nell'inferenza statistica e nella verifica di ipotesi.

Il teorema del limite centrale è anche alla base della **legge degli errori accidentali**: al crescere del numero n di misurazioni, l'errore di misura ϵ si distribuisce come una normale con media zero, ossia $\epsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Durante il laboratorio 3-4 vedremo alcune applicazioni dei concetti fino ad ora esposti, in particolare per quanto riguarda lo studio dell'incertezza di misura.

Sintesi

Elementi di raccordo tra i moduli [A]-[B]

- La misurazione è un processo aleatorio
- Il calcolo delle probabilità, la teoria delle variabili aleatorie, l'inferenza statistica† sono elementi di base per lo studio della misurazione
- Il misurando (misurazione diretta) o gli input che costituiscono il misurando (misurazione indiretta) sono variabili aleatorie dotate di distribuzione di probabilità
- Misurare significa estrarre da una popolazione X un campione di misure $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (istanze) attraverso le quali studiare X (inferenza statistica)
- Misurare significa studiare la legge (probabilistica) F che governa il misurando $\eta \sim F(x; \boldsymbol{\theta})$
- Nella valutazione dell'incertezza (teoria degli errori, incertezza tipo A) è centrale il ruolo giocato dal teorema del limite centrale e dalla legge dei grandi numeri, nonché dalle condizioni di ripetibilità degli esperimenti aleatori

† L'*inferenza statistica* e le sue applicazioni, come la *verifica di ipotesi*, non è stata trattata in questo modulo poiché ampiamente trattata durante il corso di Psicometria del secondo anno al quale si rimanda per un eventuale ripasso.